目　录

第一章　微分流形

在研究 Euclid 空间中大量的光滑曲线、曲面的基础上，本章§1引进了局部坐标和微分流形的概念．由于局部坐标的引入，使我们可以利用数学分析中微分学的知识，并在§2介绍了微分流形之间映射的可微性和浸入、嵌入、微分同胚等重要概念．§3中证明了一个紧致的 n 维微分流形可以嵌入(安装)到 Euclid 空间$\boldsymbol{R}^N$中作为它的正则子流形．而 Whitney 嵌入定理指出，一个仿紧的 n 维微分流形可以嵌入到$\boldsymbol{R}^{2n+1}$中作为它的正则子流形．在§3中还介绍了单位分解，并证明了仿紧n维微分流形上单位分解的存在性定理．它在第三章定义流形上的积分，证明 Stokes 定理和第五章证明向量丛上Riemann度量存在性定理等起着极其重要的作用．

§1　微分流形

设 $\boldsymbol{R}$ 为实数域，$\boldsymbol{N}$ 为自然数集，$n\in\boldsymbol{N}$，n 维 Euclid 空间

$$\boldsymbol{R}^n=\{x=(x^1,\cdots,x^n)\,|\,x^i\in\boldsymbol{R},1\leqslant i\leqslant n\},$$

其中x^i为点 x 的第i 个坐标．如果$x,y\in\boldsymbol{R}^n$，我们用$\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x^iy^i$和 $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}$分别表示 x，y 的内积和距离，而$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2}$ 表示 x 的模．

设 $U\subset\boldsymbol{R}^n$ 为开集，如果函数 $f:U\to\boldsymbol{R}$ 连续，则称 f 是C^0类的；如果 f 有 r 阶连续偏导数，则称 f 是 C^r 类的($r\in\boldsymbol{N}$)；如果 f 有任意阶连续偏导数，则称 f 是 C^∞类的；如果 f 是实解析函数(f 在 U

的每一点的某个开邻域里可展开成 n 元收敛的幂级数)，则称 f 是 C^{ω} 类的.

设 $f=(f_1,\cdots,f_m):U\to\boldsymbol{R}^m$ 为映射，如果 $f_1,\cdots,f_m$ 都是 C^r 类的，则称映射 f 是 C^r 类的，其中 $r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$. 记 $C^r(U,\boldsymbol{R}^m)=\{f\,|\,f:U\to\boldsymbol{R}^m$ 是 C^r 的$\}$，并规定 $0<1<2<3<\cdots<\infty<\omega$.

众所周知，$\boldsymbol{R}^n$ 中有整体的直角坐标. 设 p 点的直角坐标为 $x^i=x^i(p)$, $i=1,\cdots,n$，则 $p\to p_0\Leftrightarrow x^i(p)\to x^i(p_0)$, $i=1,\cdots,n$. 那么单位球面 $S^n=\{x=(x^1,\cdots,x^{n+1})\,|\,\sum\limits_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是否也有整体坐标呢？换句话说，是否存在一个同胚 $\varphi:S^n\to\varphi(S^n)\subset\boldsymbol{R}^n$，使得 $x^i(p)$, $i=1,\cdots,n$ 作为 p 点的坐标. 利用 Brouwer 区域不变性定理，即设 $U\subset\boldsymbol{R}^n$ 为开集，$f:U\to f(U)\subset\boldsymbol{R}^n$ 为同胚映射，则 $f(U)$ 也为 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集，可以推出同胚 φ 是不存在的. (反证) 假设 φ: $S^n\to\varphi(S^n)\subset\boldsymbol{R}^n$ 为同胚，由 S^n 的每一点 p 有一开邻域 V_p 同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集和 Brouwer 区域不变性定理，$\varphi(V_p)\subset\varphi(S^n)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，于是 $\varphi(S^n)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集. 另一方面，因紧致集 S^n 的连续象 $\varphi(S^n)$ 是紧致集，故为闭集. 又因 $\boldsymbol{R}^n$ 连通，所以 $\varphi(S^n)=\boldsymbol{R}^n$. 从 $\boldsymbol{R}^n$ 非紧致可知 $\varphi(S^n)$ 也非紧致，这与上述 $\varphi(S^n)$ 紧致相矛盾.

因此，我们只能降低要求，看能否使 S^n 的每一点有一个开邻域与 $\boldsymbol{R}^n$ 中的某个开集同胚(局部欧). 例如，从 $U_1=S^n-\{(0,\cdots,0,-1)\}$ 到 $\boldsymbol{R}^n=\{(x^1,\cdots,x^n,0)\,|\,x^i\in\boldsymbol{R}\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 作南极投影 $\varphi_1:U_1\to\boldsymbol{R}^n$，使 $\varphi_1(p)$ 为 p 和南极 $(0,\cdots,0,-1)$ 连线与 $\boldsymbol{R}^n$ 的交点. 类似地，从 $U_2=S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 作北极投影 $\varphi_2:U_2\to\boldsymbol{R}^n$，使 $\varphi_2(p)$ 为 p 和北极 $(0,\cdots,0,1)$ 连线与 $\boldsymbol{R}^n$ 的交点，于是，S^n 是由两个局部欧的开集粘起来的(见 8 页图 2).

从上面这具体例子，就产生了拓扑流形这个近代数学中极其

重要和基本的概念.

定义 1 设M为T_2(Hausdorff)空间. 如果对任何$p\in M$, 都存在p在M中的开邻域U和同胚$\varphi:U\to\varphi(U)$, 其中$\varphi(U)\subset \mathbf{R}^n$为开集(局部欧), 则称$M$为 **$n$ 维拓扑流形或 C^0 流形**.

(U,φ)称为**局部坐标系**(坐标卡, 图片), U称为**局部坐标邻域**, φ称为**局部坐标映射**, $x^i(p)=(\varphi(p))^i, 1\leqslant i\leqslant n$为$p\in U$的**局部坐标**, 简记为$\{x^i\}$, 有时也称它为局部坐标系. 如果记$\mathscr{D}^0$为局部坐标系的全体, 那末, 拓扑流形就是由$\mathscr{D}^0$中的图片粘成的图册. 如果$p\in U$, 则称$(U,\varphi)$为 **$p$ 的局部坐标系**.

设$(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}^0, U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, 称$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$和$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$为**坐标变换**. 对实函数$f:M\to\mathbf{R}$, 如果$f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\mathbf{R}$是$C^r$类的$(r\geqslant 1)$, $f\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\mathbf{R}$不一定是$C^r$类的. 但是, 当$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$是$C^r$类时, $f\circ\varphi_\beta^{-1}=(f\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})$也是$C^r$类的. 由此引导我们定义下面$C^r$微分流形的概念.

定义 2 设$(M,\mathscr{D}^0)$为n维拓扑流形, Γ是指标集, 如果$\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}\subset\mathscr{D}^0$满足:

(1) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha=M$;

(2) 相容性: 如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}$, $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, 则$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$是$C^r$类的, $r\in\{1,2,\cdots,\infty,\omega\}$(由对称性, 当然$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$也是$C^r$类的), 即

$$\begin{cases}y^1=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})_1(x^1,\cdots,x^n)\\ \cdots\\ y^n=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})_n(x^1,\cdots,x^n)\end{cases}$$

是C^r类的;

(3) 最大性: $\mathscr{D}$关于(2)是最大的, 也就是说, 如果$(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0$, 且它与任何$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$是$C^r$相容的, 则$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$. 它等价于, 如

果$(U,\varphi)\overline{\in}\mathscr{D}$，则$(U,\varphi)$必与某个$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$不是$C^r$相容的.

我们称$\mathscr{D}$为M上的**C^r微分构造或C^r构造**，$(M,\mathscr{D})$为M上的**C^r微分流形或C^r流形**. 当$r=\omega$时，称$(M,\mathscr{D})$为**实解析流形**(图 1).

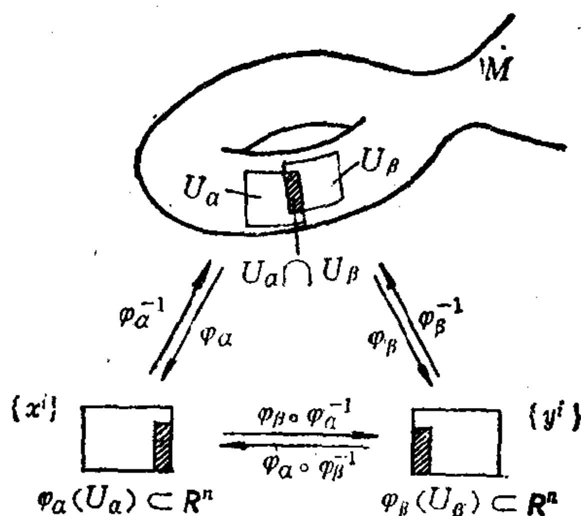


图 1

类似于拓扑流形，C^r微分流形就是由$\mathscr{D}$中图片光滑(C^r, $r\geqslant 1$)粘成的图册.

如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $\{x^i\}\in\mathscr{D}$和(U_β,φ_β), $\{y^i\}\in\mathscr{D}$为p的两个局部坐标系，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则由 Jacobi 行列式的等式

$$1=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\cdot\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$$

可知，在$\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$中，

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\neq 0.$$

一般说来，要得到$\mathscr{D}$中所有的图片是困难的，下面定理指出，只要得到满足定义 2 中(1)和(2)的$\mathscr{D}'$就可唯一确定$\mathscr{D}$了. 我们称$\mathscr{D}'$为微分构造$\mathscr{D}$的一个**基**. 这就给出了具体构造微分流形的方法，它与线性代数中由基生成向量空间以及点集拓扑中由拓扑基生成拓扑的想法是完全类似的.

设$(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0$，如果对任何$(V,\psi)\in\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$，$\psi\circ\varphi^{-1}$和$\varphi\circ\psi^{-1}$是$C^r$类的，则称$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}'$是$C^r$相容的.

定理 1 1° 设$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$满足定义 2 中条件 (1) 和(2)，则它唯一确定了一个C^r微分构造$(r\geqslant 1)$ $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0 \mid (U,\varphi)$与$\mathscr{D}'C^r$相容$\}$；

2° 设$\mathscr{D}_1',\mathscr{D}_2'\subset\mathscr{D}^0$满足定义 2 中条件(1)和(2)且彼此的元素$C^r$相容，则它们所确定的$C^r$微分构造是相同的，即$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

证明 1°由条件(2)和$\mathscr{D}$的定义，$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$，故$\mathscr{D}$满足条件(1). 设$(U,\varphi),(V,\psi)\in\mathscr{D}$，若$p\in U\cap V$，则存在$p$的局部坐标系$(W,\theta)\in\mathscr{D}'$使在$U\cap V\cap W$中，$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$是$C^r$类的，因此，$\mathscr{D}$满足条件(2). 设$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}C^r$相容，由$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$可知$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}'C^r$相容，即$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$. 因此，$\mathscr{D}$满足条件(3). 这就证明了$\mathscr{D}$为$C^r$微分构造.

2°设$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$，对任何$(V,\psi)\in\mathscr{D}_2'$，若$p\in U\cap V$，则存在$p$的局部坐标系$(W,\theta)\in\mathscr{D}_1'$，使在$U\cap V\cap W$中，$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\varphi^{-1})$和$\varphi\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ\psi^{-1})$是$C^r$类的，所以$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_2$，$\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}_2$. 同理，$\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}_1$. 这就证明了$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$. #

引理 1 设$k,r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$，$k<r$，则存在$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，使$f$是$C^k$类但不是$C^r$类的.

证明 如果$0\leqslant k<\infty$，则

$$f(x)=\begin{cases}x^{2k+1}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

为所求函数. 如果$k=\infty$，$r=\omega$，则

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

为所求函数. 事实上，由归纳法和L'Hopital (洛比塔)法则可

知,

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}p_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0 & ,x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $p_n(u)$ 为 u 的多项式，这就证明了 f 是 C^∞ 类的. 但它不是 C^ω 类的.（因为，若 f 是 C^ω 类的，则存在 $\delta>0$，使 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=0, x\in(-\delta,\delta)$，这与 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}>0, x\in(0,\delta)$ 相矛盾. #

更进一步，我们可以构造一个处处 C^∞ 但无处解析的函数. 为此，令 $\varphi(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0 & ,x\leqslant 0,\end{cases}$ $\psi_n(x)=\varphi(x)\varphi\left(\dfrac{1}{2^n}-x\right)$, $n\in N$. 显然，在 $x=0$, $\dfrac{1}{2^n}$ 处，$\psi_n(x)$ 的各阶导数为0. 以 $\dfrac{1}{2^n}$ 为周期将 $\psi_n\Big|_{\left[0,\frac{1}{2^n}\right]}$ 延拓到整个 $\boldsymbol{R}$ 上得 $\varphi_n(x)$. 易见 $\varphi_n(x)$ 为 C^∞ 函数，且当 $x\neq\dfrac{k}{2^n}$（整数集 $\mathbf{Z}\ni k$）时解析. 令 $0<a_n<\dfrac{1}{2^n}(\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\{|\varphi_n(x)|, |\varphi'_n(x)|, \cdots, |\varphi_n^{(n)}(x)|\})^{-1}$ 和

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x).$$

由 a_n 的取法易知 f 是 C^∞ 类的. 但 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{k}{2^m}(k\in\mathbf{Z}, m\in N)$ 处不解析. 事实上，不妨设 k 为奇数（否则约分），则 $\psi_l(x)$ 在 $\dfrac{k}{2^m}$ 处解析 $(l=0,1,\cdots,m-1)$. 但当 $n\geqslant m$ 时，$\psi_n^{(s)}\left(\dfrac{k}{2^m}\right)=\psi_n^{(s)}\left(\dfrac{k}{2^n}\right)=0$, $s=0,1,2,\cdots$，故 $\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ 在 $\dfrac{k}{2^m}$ 处各阶导数为0，但在 $\dfrac{k}{2^m}$ 附近非恒为

0，故不解析．这就证明了$f(x)=\sum_{l=0}^{m-1}a_l\varphi_l(x)+\sum_{n=m}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$在$\frac{k}{2^m}$处不解析．但$\left\{\frac{k}{2^m}\middle| k\in\mathbf{Z},\ m\in\mathbf{N}\right\}$在$\mathbf{R}$上稠密，故$f(x)$无处解析．

定理 2 设$k,\ r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$，$k<r$．$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$满足定义 2 中的条件(1)和(2)．由$\mathscr{D}'$唯一确定的$C^r$微分构造$\mathscr{D}^r=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0 \mid (U,\varphi)$与$\mathscr{D}'C^r$相容$\}$．如果将$\mathscr{D}'$的$C^r$相容自然视作$C^k$相容，而由$\mathscr{D}'$唯一确定的$C^k$构造$\mathscr{D}^k=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0 \mid (U,\varphi)$与$\mathscr{D}'C^k$相容$\}$．则$\mathscr{D}^r\subsetneqq\mathscr{D}^k$．

证明 因$k<r$，故(U,φ)与$\mathscr{D}'C^r$相容也是C^k相容，这就推出了$\mathscr{D}^r\subset\mathscr{D}^k$．

再证$\mathscr{D}^r\neq\mathscr{D}^k$．设$f$为引理 1 中的$f$，如果$k>0$，令$g(x)=x+f(x)$，则$g'(0)=1+f'(0)=1$；如果$k=0$，令$g(x)=x^{\frac{1}{3}}$．于是，存在$\delta>0$，使$g$在$(-\delta,\delta)$内严格递增．设$(U,\varphi)\in\mathscr{D}^r$，$p\in U$，令$\theta(x)=x-\varphi(p)$为平移；$(-\delta,\delta)^n=\{x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbf{R}^n \mid |x^i|<\delta\}$，$\eta:(-\delta,\delta)^n\to\mathbf{R}^n$，$\eta(x)=(g(x^1),x^2,\cdots,x^n)$．则存在$p$的开邻域$V\subset U$，且$0\in\theta\circ\varphi(V)\subset(-\delta,\delta)^n$．于是，

$$(\eta\circ\theta\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}=\eta\circ\theta$$

是C^k类但不是C^r类的，这就证明了$(V,\ \eta\circ\theta\circ\varphi)$和$(U,\ \varphi)$是$C^k$相容但不是$C^r$相容的，即$(V,\eta\circ\theta\circ\varphi)\in\mathscr{D}^k$但$(V,\eta\circ\theta\circ\varphi)\overline{\in}\mathscr{D}^r$．#

从这个定理可知，当$k<r$时，如果加进与C^r流形$(M,\mathscr{D}^r)C^k$相容的所有图片，它就可成为一个C^k流形$(M,\mathscr{D}^k)$，此时，$\mathscr{D}^k$的图片确实比$\mathscr{D}^r$的图片严格增多了．以后，当$k<r$时，凡是C^r流形，总是按上述理解，它也是一个C^k流形．

有了上述定理，我们就可构造各种各样的流形了．

例 1 设M为$\mathbf{R}^n$中的开集，$\mathscr{D}'=\{(M,\ \mathrm{Id}_M) \mid \mathrm{Id}_M:M\to M,\ \mathrm{Id}_M(p)=p,p\in M\}$，则由$\mathscr{D}'$唯一确定了一个$C^\omega$流形（由定理 2，它

也唯一确定了一个 C^r 流形，$r\in\{0,1,2,\cdots,\infty\}$，但当 r 增大时，图片严格减少）. 它就是通常所指的流形. 称 Id_M 为 M 上的恒同映射.

例 2 设 $(M,\mathscr{D}_M)$ 为 n 维 C^r 流形，$U\subset M$ 为开集，$\mathscr{D}_M=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$，令

$$\mathscr{D}_U=\{(U\cap U_\alpha,\varphi_\alpha|U\cap U_\alpha)\mid U\cap U_\alpha\neq\varnothing,\alpha\in\Gamma\},$$

易证 $(U,\ \mathscr{D}_U)$ 也是一个 n 维 C^r 流形，称为 $(M,\ \mathscr{D}_M)$ 的 **C^r 开子流形**.

例 3 S^n 为 n 维 C^ω 流形.

设 $p\in S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$，它的直角坐标为 $(x^1,\ \cdots,\ x^{n+1})$. 如果将 $\boldsymbol{R}^n=\{(x^1,\cdots,x^n,\ 0)\mid x^i\in\boldsymbol{R},\ 1\leqslant i\leqslant n\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 与 $\{(x^1,\ \cdots,\ x^n)\mid x^i\in\boldsymbol{R},1\leqslant i\leqslant n\}$ 视作相同，则从图 2容易算出

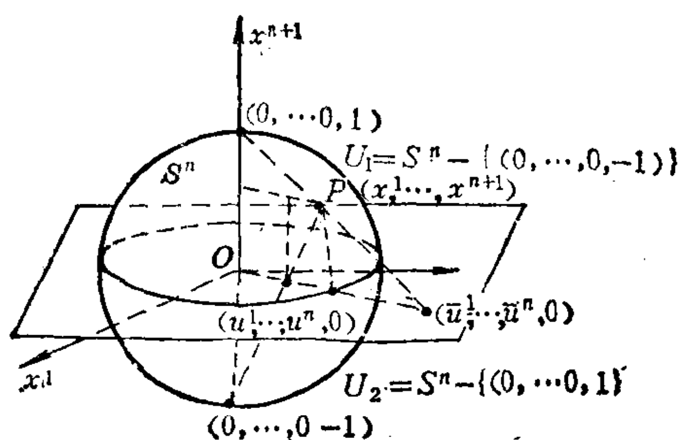


图 2

$$\varphi_1:U_1\longrightarrow\boldsymbol{R}^n,$$

$$(u^1,\cdots,u^n)=\varphi_1(x^1,\cdots,\ x^{n+1})=\left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right),$$

$$(x^1,\cdots,x^{n+1})=\varphi_1^{-1}(u^1,\cdots,u^n)$$

$$=\left(\frac{2u^1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}(u^i)^2},\ \cdots,\frac{2u^n}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}(u^i)^2},\ \frac{1-\sum\limits_{i=1}^{n}(u^i)^2}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}(u^i)^2}\right),$$

$$\varphi_2: U_2 \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

$$(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n) = \varphi_2(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right),$$

$$(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \varphi_2^{-1}(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n)$$

$$= \left(\frac{2\bar{u}^1}{1+\sum_{i=1}^n (\bar{u}^i)^2}, \cdots, \frac{2\bar{u}^n}{1+\sum_{i=1}^n (\bar{u}^i)^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{u}^i)^2 - 1}{1+\sum_{i=1}^n (\bar{u}^i)^2}\right),$$

且

$$(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^n) = \left(\frac{u^1}{\sum_{i=1}^n (u^i)^2}, \cdots, \frac{u^n}{\sum_{i=1}^n (u^i)^2}\right),$$

$$(u^1, \cdots, u^n) = \left(\frac{\bar{u}^1}{\sum_{i=1}^n (\bar{u}^i)^2}, \cdots, \frac{\bar{u}^n}{\sum_{i=1}^n (\bar{u}^i)^2}\right).$$

于是，$\mathscr{D}_1' = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$满足定义1中条件(1)：$S^n = U_1 \cup U_2$和(2)：$\mathscr{D}_1'$中元素是$C^\omega$相容的（$\{u^i\}$和$\{\bar{u}^i\}$彼此可表示为实有理函数，由于实变量的有理函数自然可延拓为复变量的有理函数.再由求导的加减乘除法则，后者关于复变量是可导的，故解析，于是它在每一点的一个开邻域内可展开成收敛的幂级数. 如果再限制到实变量，它在每一实点的一个实开邻域内展开成收敛的幂级数.因此，实有理函数是实解析的. 应用[I. M. 菲赫金哥尔茨，445页]的方法也可证明上述结论.）. 根据定理1，$\mathscr{D}_1'$确定了S^n上的一个C^ω微分构造$\mathscr{D}_1 = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi)$与$\mathscr{D}_1' C^\omega$相容$\}$，而$\mathscr{D}_1'$是$C^\omega$微分构造$\mathscr{D}_1$的一个基. 通过计算得到Jacobi行列式为

$$J_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}} = -\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (u^i)^2\right)^n}.$$

如果将局部坐标$\{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3, \cdots, \bar{u}^n\}$换成$\{\bar{u}^2, \bar{u}^1, \bar{u}^3, \cdots, \bar{u}^n\}$，则相应

的 Jacobi 行列式就大于 0.

下面我们换一种方式来给出 S^n 的 C^ω 微分构造的另一个基. 为此,对任何 $i=1,\cdots,n+1$,令

$$U_i^+=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in S^n\mid x^i>0\},$$
$$U_i^-=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in S^n\mid x^i<0\},$$

$$\varphi_i^\pm:U_i^\pm\to\varphi_i^\pm(U_i^\pm)=\{(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1})\mid\sum_{j\neq i}(x^j)^2<1\},$$

$$\varphi_i^\pm(x^1,\cdots,x^{n+1})=(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}),$$

称 $\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}\}$ 为 $U_i^\pm$ 中的局部坐标, 其中 $\hat{x}^i$ 表示删去 x^i.

容易看出,$\mathscr{D}_2'=\{(U_i^\pm,\varphi_i^\pm)\mid i=1,\cdots,n+1\}$ 满足定义 1 中的 (1): $S^n=\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}(U_i^+\cup U_i^-)$和(2): $\mathscr{D}_2'$ 中的元素是 C^ω 相容的. 例如,

$$\varphi_2^+\circ(\varphi_1^-)^{-1}(x^2,\ \cdots,\ x^{n+1})=\varphi_2^+(x^1,\ \cdots,\ x^{n+1})=(x^1,x^3,\cdots,x^{n+1})$$

$=\left(-\sqrt{1-\sum\limits_{i=2}^{n+1}(x^i)^2}\ ,x^3,\cdots,x^{n+1}\right)$是 C^ω 类的(利用$\sqrt{1-u}$在0的开邻域$(-1,\ 1)$ 中可展开成收敛的幂级数和[*I. M.* 菲赫金哥尔茨, *p*438]证明或直接用 ε-N 方法证明). 根据定理 1, $\mathscr{D}_2'$确定了 S^n 上的一个 C^ω 微分构造 $\mathscr{D}_2=\{(U,\varphi)\mid(U,\varphi)$与$\mathscr{D}_2'C^\omega$ 相容$\}$,而$\mathscr{D}_2'$是 C^ω 微分构造$\mathscr{D}_2$ 的一个基. 通过计算得到 Jacobi 行列式为

$J_{\varphi_j^\pm\circ(\varphi_i^\pm)^{-1}}=(-1)^{i+j}\dfrac{x^j}{x^i}$. 如果取$(-1)^{i+1}\{x^1,\ \cdots,\hat{x}^i,\cdots,\ x^{n+1}\}$ 为 U_i^+的局部坐标 ($(-1)^{i+1}\{x^1,\ \cdots,\ \hat{x}^i,\ \cdots,\ x^{n+1}\}$ 表示将坐标 $\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}\}$作$i+1$ 次对换),取$(-1)^i\{x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1}\}$ 为U_i^- 的局部坐标,则相应的 Jacobi 行列式就大于 0.

因为$\{x^1,\cdots,x^{n+1}\}$与$\{u^1,\cdots,u^n\}$(或$\{\bar{u}^1,\cdots,\bar{u}^n\}$)彼此可以表示出来,且$\mathscr{D}_1'$与$\mathscr{D}_2'$中的元素是 C^ω 相容的,由定理 1 可知,$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

应该指出的是,紧致集 S^n 不能与 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集同胚, 所以 S^n

不是局部坐标邻域.

此外,对于 S^2,球面坐标系 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$,它是局部坐标系而不是整体坐标系,其中

$$\varphi^{-1}:(0,\pi)\times(0,2\pi)\to U=\varphi^{-1}((0,\pi)\times(0,2\pi))\subset S^n,$$

$$\varphi^{-1}(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ \sin\theta\cdot\sin\varphi,\ \cos\theta).$$

对于 S^1,令

$$\psi_1:S^1-\{e^{i0}\}\to(0,2\pi)\subset\boldsymbol{R}^1,$$

$$\psi_1(e^{i\theta})=\theta,\ \theta\in(0,2\pi),$$

$$\psi_2:S^1-\{e^{i\pi}\}\to(\pi,3\pi)\subset\boldsymbol{R}^1,$$

$$\psi_2(e^{i\eta})=\eta,\ \eta\in(\pi,3\pi).$$

显然,在 $S^1-\{e^{i0},e^{i\pi}\}$ 中,$e^{i\theta}=e^{i\eta}\Leftrightarrow$

$$\eta=\theta+2k\pi=\begin{cases}\theta+2\pi, & \theta\in(0,\pi)\\ \theta, & \theta\in(\pi,2\pi).\end{cases}$$

于是 η 是 θ 的 C^ω 函数,θ 也是 η 的 C^ω函数. 由定理 1,$\mathscr{D}_3'=\{(S^1-\{e^{i0}\},\psi_1),(S^1-\{e^{i\pi}\},\ \psi_2)\}$确定了一个 1 维 C^ω 微分构造$\mathscr{D}_3$. 易见 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2=\mathscr{D}_3$. 同样值得注意的是,$\theta$ 是局部坐标系而不是整体坐标系.

例 4 n 维实射(投)影空间 $P^n(\boldsymbol{R})$.

设 $x=(x^1,\cdots,x^{n+1}),y=(y^1,\cdots,y^{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$. $x\sim y\Leftrightarrow x=\lambda y,\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq0$. $x\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$ 的等价类 $[x]=\{y\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}\mid y\sim x\}$,等价类的全体为

$$P^n(\boldsymbol{R})=(\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\})/\sim=\{[x]\mid x\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}\}.$$

投影 $\pi:R^{n+1}-\{0\}\to P^n(\boldsymbol{R})$, $\pi(x)=[x]$. 设 $R^{n+1}-\{0\}$的拓扑为 τ,易证$\tau'=\{U\mid\pi^{-1}(U)\in\tau\}$为 $P^n(\boldsymbol{R})$上的一个拓扑,于是$(P^n(\boldsymbol{R}),\tau')$为$(\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\},\tau)$的商拓扑空间,称为 n 维实射影空间. 下面我们可以证明 $P^n(\boldsymbol{R})$为 n 维 C^ω 流形. 对任何$[x]$, $[y]\in P^n(\boldsymbol{R})$, $[x]\neq[y]$,则存在含 $\pi^{-1}([x])$的以原点为心的去心开锥体 V_x和含

$\pi^{-1}([y])$的以原点为心的去心开锥体V_y，使得$V_x\cap V_y=\varnothing$，因而$\pi(V_x)$和$\pi(V_y)$分别是含$[x]$和$[y]$的不相交的开集，故$(P^n(\mathbf{R}),\tau')$为T_2空间．令

$$U_k=\{[x]\in P^n(\mathbf{R})\mid x=(x^1,\cdots,x^{n+1}),x^k\neq 0\},$$

$$\varphi_k:U_k\to\mathbf{R}^n,$$

$$\varphi_k([x])=\left(\frac{x^1}{x^k},\cdots,\frac{x^{k-1}}{x^k},\frac{x^{k+1}}{x^k},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^k}\right)=({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{n+1})$$

我们称$\{x^1,\cdots,x^{n+1}\}$为$[x]$的齐次坐标，$\{{}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{n+1}\}$为$[x]$关于$U_k$的非齐次坐标．

显然，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}U_k=P^n(\mathbf{R})$，且当$U_k\cap U_l\neq\varnothing$，$k\neq l$时，

$$\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}:\varphi_k(U_k\cap U_l)\to\varphi_l(U_k\cap U_l),$$

$$\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{n+1})=\varphi_l([x])=({}_l\xi^1,\cdots,{}_l\xi^{l-1},{}_l\xi^{l+1},\cdots,{}_l\xi^{n+1}).$$

其中

$$\begin{cases}{}_l\xi^h=\dfrac{x^h}{x^l}=\dfrac{x^h}{x^k}\Big/\dfrac{x^l}{x^k}=\dfrac{{}_k\xi^h}{{}_k\xi^l},\ h\neq l,k,\\[2ex] {}_l\xi^k=\dfrac{x^k}{x^l}=1\Big/\dfrac{x^l}{x^k}=\dfrac{1}{{}_k\xi^l},\end{cases}$$

为有理函数，因而它是C^∞函数．由定理1可知，$\mathscr{D}'=\{(U_k,\varphi_k)\mid k=1,\cdots,n+1\}$确定了$P^n(\mathbf{R})$上的一个$C^\infty$微分构造$\mathscr{D}$，使$(P^n(\mathbf{R}),\mathscr{D})$成为$C^\infty$流形．

通过计算得到 Jacobi 行列式

$$J_{\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}}=\frac{\partial({}_l\xi^1,\cdots,{}_l\xi^{l-1},{}_l\xi^{l+1},\cdots,{}_l\xi^{n+1})}{\partial({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{n+1})}$$

$$=(-1)^{l+k}\frac{1}{({}_k\xi^l)^{n+1}}.$$

当n为奇数时，$({}_k\xi^l)^{n+1}>0$．如果k为奇数，相应的局部坐标不

变;如果 k 为偶数，相应的局部坐标只改变其中一个，即 ${}_k\xi^s$ 变为 $-{}_k\xi^s$，而其余的不变. 显然，局部坐标改变后的 Jacobi 行列式大于 0. 当 n 为偶数时，由于 ${}_k\xi^l$ 有正有负，故 $J_{\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}}$ 也有正有负.

我们再用另一观点来研究 $P^n(\boldsymbol{R})$. 设 $x=(x^1, \cdots, x^{n+1}), y=(y^1,\cdots,y^{n+1})\in S^n, x\sim y\Leftrightarrow x=-y$, $[x]=\{x,-x\}$, $P^n(\boldsymbol{R})=S^n/\sim=\{[x]\mid x\in S^n\}$. 令

$$U_k=\{[x]\in P^n(\boldsymbol{R})\mid x^k\neq 0\},$$

$$\varphi_k:U_k\to\{\xi_k=(\xi_k^1,\cdots,\xi_k^n)\mid\sum_{j=1}^{n}(\xi_k^j)^2<1\},$$

$$\begin{aligned}\varphi_k([x])&=x^k\cdot|x^k|^{-1}(x^1,\cdots,x^{k-1},x^{k+1},\cdots,x^{n+1})\\&=(\xi_k^1,\cdots,\xi_k^n)=\xi_k.\end{aligned}$$

类似于例 3 可以证明 $\mathscr{D}'=\{(U_k,\varphi_k)\mid k=1,\cdots,n+1\}$ 满足定义1中条件(1)和(2)，从而它确定了 $P^n(\boldsymbol{R})$ 上的一个 C^ω 微分构造.

例 5 n 维复解析流形.

如果定义 2 中，用 $\boldsymbol{C}^n=\{z=(z^1,\cdots,z^n)\mid z^j\in\boldsymbol{C}$(复数域)$\}$ 代替 $\boldsymbol{R}^n$，复解析(函数在每一点的一个开邻域中可以展开成复的收敛幂级数)代替实解析，则称 $(M,\mathscr{D})$ 为 **n 维复解析流形**.

设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $\{z^j\}$ 和 (U_β,φ_β), $\{w^j\}$ 为局部坐标系，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, $\varphi_\alpha(p)=(z^1,\cdots,z^n)=z\in\boldsymbol{C}^n$, $\varphi_\beta(p)=(w^1,\cdots,w^n)=w\in\boldsymbol{C}^n$, $z^j=x^j+iy^j$, $w^j=u^j+iv^j$, $x^j,y^j,u^j,v^j\in\boldsymbol{R}$, $j=1,\cdots,n$，其中 $i^2=-1$. 于是，

$$u+iv=w=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(z)=f_{\alpha\beta}(x,y)+ig_{\alpha\beta}(x,y),$$

利用实和复幂级数的 Cauchy 收敛原理以及 $\max\{|a|,|b|\}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}=|a+ib|$ 可知 $(a,b\in\boldsymbol{R})$, $u=f_{\alpha\beta}(x,y)$, $v=g_{\alpha\beta}(x,y)$ 为实解析的映射. 如果将 $\{x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n\}$ 和 $\{u^1,\cdots,u^n,v^1,\cdots,v^n\}$ 分别视作 p 点的实局部坐标，则 $(M,\mathscr{D})$ 自然可视作 $2n$ 维实解析

流形. 此外,由 Cauchy-Riemann 条件: $\frac{\partial u^j}{\partial x^l}=\frac{\partial v^j}{\partial y^l}, \frac{\partial u^j}{\partial y^l}=-\frac{\partial v^j}{\partial x^l}$,

我们得到 Jacobi 行列式为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(u^1,\cdots,u^n,v^1,\cdots,v^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)}\\
&=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}\\
&=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}\\
&=\det\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\det\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\det\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
&\quad\cdot\overline{\det\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\\
&=\left|\frac{\partial(w^1,\cdots,w^n)}{\partial(z^1,\cdots,z^n)}\right|^2>0,\text{其中}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial u^1}{\partial x^n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial u^n}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial u^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}.
$$

显然, $\mathscr{D}'=\{(\boldsymbol{C}^n,\mathrm{Id}_{\boldsymbol{C}^n})\,|\,\mathrm{Id}_{\boldsymbol{C}^n}:\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^n,\ \mathrm{Id}_{\boldsymbol{C}^n}(z)=z\}$ 唯一确定了 $\boldsymbol{C}^n$ 上的一个复解析流形 $(\boldsymbol{C}^n,\mathscr{D})$.

考虑另一典型例子, 设 $z=(z^1,\ \cdots,\ z^{n+1}), w=(w^1,\cdots,w^{n+1})\in\boldsymbol{C}^{n+1}-\{0\}$, $z\sim w\Leftrightarrow z=\lambda w$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$, $\lambda\neq0$. $[z]=\{w\in\boldsymbol{C}^{n+1}-\{0\}\,|\,w\sim z\}$, $P^n(\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{C}^{n+1}-\{0\})/\sim=\{[z]\,|\,z\in\boldsymbol{C}^{n+1}-\{0\}\}$. 类似于实射影空间可以证明 $P^n(\boldsymbol{C})$ 为 n 维复解析流形, 并称它为 n 维复

射影空间.

用另一观点表示 $P^n(\mathbf{C})$，设 $S^{2n+1}=\{z=(z^1,\cdots,z^{n+1})\in\mathbf{C}^{n+1}|\sum_{j=1}^{n+1}z^j\cdot\overline{z^j}=1\}$，$z,w\in S^{2n+1}$，$z\sim w\Leftrightarrow z=\lambda w,\lambda=e^{i\theta}$. $[z]=\{w\in S^{2n+1}|w\sim z\}$，则 $P^n(\mathbf{C})=S^{2n+1}/\sim=\{[z]|z\in S^{2n+1}\}$，易证它为 n 维复解析流形(参阅第二章§2 例 4).

例 6 设 $T(m,n)=\{X|X$ 为 $m\times n$ 实矩阵$\}=\mathbf{R}^{mn}$(X 中元素按 $(x_{11},\cdots,x_{1n},x_{21},\cdots,x_{2n},\cdots,x_{m1},\cdots,x_{mn})$ 排列，视它为 $\mathbf{R}^{mn}$ 中的一点)，则它自然确定了一个 C^ω 流形. 下面可证 $T(m,n)$ 的子拓扑空间 $T(m,n;k)=\{X\in T(m,n)|\operatorname{rank}X=k\}$ 为一个 $k(m+n-k)$ 维 C^ω 流形($k\in\mathbf{N}$, $0<k\leqslant\min\{m,n\}$).

事实上，设 $X_0\in T(m,n;k)$，则存在可逆矩阵 P_0 和 Q_0 使得

$$P_0X_0Q_0=\begin{pmatrix}A_0 & B_0\\ C_0 & D_0\end{pmatrix},$$

这里 A_0 是 $k\times k$ 的非异矩阵. 记 $A=(a_{ij})$, $A_0=(a_{ij}^0)$，则存在 $\varepsilon>0$，当 $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k}|a_{ij}-a_{ij}^0|<\varepsilon$ 时，A 是非异矩阵. 易见

$$U_{X_0}^*=\{X\in T(m,n)|P_0XQ_0=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},\max_{1\leqslant i,j\leqslant k}|a_{ij}-a_{ij}^0|<\varepsilon\}$$

$\subset T(m,n)$ 为开集. 如果 $X\in U_{X_0}^*$，则 $X\in T(m,n;k)\Leftrightarrow D=CA^{-1}B$. 因为($I_k$ 为 $k\times k$ 单位矩阵)

$$\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -CA^{-1} & I_{m-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{pmatrix},$$

所以

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=k$$

$\Leftrightarrow -CA^{-1}B+D=0\Leftrightarrow D=CA^{-1}B$.

我们取 $U_{X_0}=U_{X_0}^*\cap T(m,n;k)$ 为 $X_0\in T(m,n;k)$ 的局部坐标邻

域(U_{X_0} 为子拓扑空间 $T(m,n;k)$ 的开集)，相应的坐标映射为

$$\varphi_{X_0}: U_{X_0} \to \varphi_{X_0}(U) \subset \mathbf{R}^{mn-(m-k)(n-k)} = \mathbf{R}^{k(m+n-k)},$$

$$\varphi_{X_0}(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

(以 A,B,C 的元素为局部坐标)．则

$$\varphi_{X_0}^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = X = P_0^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}Q_0^{-1} = P_0^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q_0^{-1}.$$

如果 (U_{X_0}, φ_{X_0}) 和 (U_{X_1}, φ_{X_1}) 为两个局部坐标系，$U_{X_0} \cap U_{X_1} \neq \varnothing$，则

$$\varphi_{X_1} \circ \varphi_{X_0}^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_1 P_0^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q_0^{-1}Q_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & C_1 A_1^{-1} B_1 \end{pmatrix}.$$

因为此等式右边 A_1, B_1, C_1 中的每个元素都是 A,B,C 的元素的有理函数，故是 C^∞ 类的．于是，$\mathscr{D}' = \{(U_{X_0}, \varphi_{X_0}) \mid X_0 \in T(m,n;k)\}$ 唯一确定了一个 $k(m+n-k)$ 维的 C^∞ 流形 $(T(m,n;k), \mathscr{D})$．特别地，$\mathbf{R}^n$ 中的 m-标架空间 $T(m,n;m)$ 是 $T(m,n) = \mathbf{R}^{mn}$ 中的开子流形．

例 7　Grassmann 流形．

设 G_{km} 为 $\mathbf{R}^{m+k}$ 中的所有 m 维向量子空间(通过原点的 m 维面)所组成的集合．我们可以使它成为一个 km 维 C^∞ 流形．

考虑 $T(m,m+k;m)$．如果 $A,B \in T(m,n;m)$，我们定义：$A \sim B \Longleftrightarrow$ 矩阵 A 和 B 的行向量所生成的 m 维面相同．记等价类 $[A] = \{B \in T(m,m+k;m) \mid B \sim A\}$．于是 $G_{km} = T(m,m+k;m)/\sim = \{[A] \mid A \in T(m,m+k;m)\}$ 为 $T(m,m+k;m)$ 在等价关系 $\sim$ 下的商拓扑空间，而

$$\pi: T(m,m+k;m) \longrightarrow G_{km}, \qquad \pi(A) = [A]$$

为自然投影. 显然, $\pi(A)=\pi(B)\Longleftrightarrow A=CB$, 其中 C 为 $m\times n$ 非异矩阵.

(1) G_{km} 是局部欧的.

令 $U_{1\cdots m}=\{A=(P, Q)\in T(m, m+k; m)\mid P$ 为 $m\times m$ 非异矩阵$\}$, 因为 $\det: T(m,m+k;m)\to\boldsymbol{R}, (P,Q)\mapsto \det P$ 为连续函数, 故 $U_{1\cdots m}=\det^{-1}(\boldsymbol{R}-\{0\})$ 为 $T(m,m+k;m)$ 中的开集. 若 P 为 $m\times m$ 非异矩阵且 $\pi(P,Q)=\pi(R,S)$, 则 $(P,Q)=(CR,CS)$, C 为 $m\times m$ 非异矩阵. 因此, $R=C^{-1}P$ 一定是非异的, 这就证明了 $\pi^{-1}(\pi(U_{1\cdots m}))=U_{1\cdots m}$ 和 $\pi(U_{1\cdots m})$ 为 G_{km} 中的开集 (根据商拓扑的定义).

现在证明 $\pi(U_{1\cdots m})$ 同胚于 $\boldsymbol{R}^{km}$. 为此, 先定义

$$\tilde{\varphi}_{1\cdots m}: U_{1\cdots m}\to\boldsymbol{R}^{km},\qquad \tilde{\varphi}_{1\cdots m}(P,Q)=P^{-1}Q.$$

若 $\pi(P,Q)=\pi(R,S)$, 则 $(P, Q)=(CR, CS)$ 和 $P^{-1}Q=(CR)^{-1}(CS)=R^{-1}S$. 因此, $\tilde{\varphi}_{1\cdots m}$ 诱导出一个连续映射 $\varphi_{1\cdots m}: \pi(U_{1\cdots m})\to\boldsymbol{R}^{km}$, $\varphi_{1\cdots m}(\pi(P,Q))=P^{-1}Q$. 作 $\tilde{\psi}_{1\cdots m}: \boldsymbol{R}^{km}\to U_{1\cdots m}$, $\tilde{\psi}_{1\cdots m}(Q)=(I,Q)$ 和 $\psi_{1\cdots m}: \boldsymbol{R}^{km}\to\pi(U_{1\cdots m})$, $\psi_{1\cdots m}(Q)=\pi(I,Q)$, 其中 Q 为 $m\times k$ 矩阵. 因为对任何 $\pi(P,Q)\in\pi(U_{1\cdots m})$,

$\psi_{1\cdots m}\circ\varphi_{1\cdots m}(\pi(P, Q))=\psi_{1\cdots m}(P^{-1}Q)=\pi(I, P^{-1}Q)=\pi(P,Q)$, 而对任何 $Q\in\boldsymbol{R}^{km}$,

$$\varphi_{1\cdots m}\circ\psi_{1\cdots m}(Q)=\varphi_{1\cdots m}(\pi(I,Q))=I^{-1}Q=Q,$$

所以 $\varphi_{1\cdots m}$ 和 $\psi_{1\cdots m}$ 为互逆的逆射. 显然, $\pi, \tilde{\varphi}_{1\cdots m}, \tilde{\psi}_{1\cdots m}$ 为连续映射, 故 $\psi_{1\cdots m}=\pi\circ\tilde{\psi}_{1\cdots m}$ 也为连续映射.

设 $X\subset\boldsymbol{R}^{km}$ 为闭集. 易见,

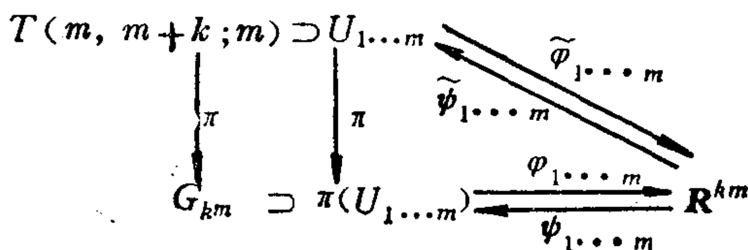
$\pi^{-1}(\varphi_{1\cdots m}^{-1}(X))=\{C(I,Q)\mid\pi(C(I,Q))=\pi(I,Q)\in\varphi_{1\cdots m}^{-1}(X)$, C 为 $m\times m$ 非异矩阵$\}=\{C(I,Q)\mid Q\in X, C$ 为 $m\times m$ 非异矩阵$\}$.

如果 $C_n(I,Q_n)\in\pi^{-1}(\varphi_{1\cdots n}^{-1}(X))$ 且 $C_n(I, Q_n)\to C_0(I, Q_0)\in U_{1\cdots m}$, 则 $C_n\to C_0$, $C_nQ_n\to C_0Q_0$. 于是, $Q_n=C_n^{-1}(C_nQ_n)\to C_0^{-1}(C_0Q_0)=Q_0$.

由于$Q_n \in X$且$X \subset \boldsymbol{R}^{km}$为闭集，所以$Q_0 \in X$且$C_0(I, Q_0) \in \pi^{-1}(\varphi_{1\cdots m}^{-1}(X))$，这就证明了$\pi^{-1}(\varphi_{1\cdots m}^{-1}(X)) \subset U_{1\cdots m}$为闭集. 根据投影$\pi$的定义，$\varphi_{1\cdots m}^{-1}(X) \subset \pi(U_{1\ldots m})$为闭集，因而$\varphi_{1\ldots m}$为连续映射.

由上述可知，$\varphi_{1\ldots m}: \pi(U_{1\ldots m}) \to \boldsymbol{R}^{km}$为同胚.

类似地，可以定义$U_{i_1\ldots i_m} = \{A = (P_1, \cdots, P_{m+k}) \mid (P_{i_1}, \cdots, P_{i_m})$为$m \times m$非异矩阵，$i_1 < i_2 < \cdots < i_m\}$和$\varphi_{i_1\cdots i_m}$. 从而$(\pi(U_{i_1\ldots i_m}), \varphi_{1\ldots m})$为$G_{km}$的局部坐标系. 因$G_{km} = \bigcup_{i_1 < \cdots < i_m} \pi(U_{i_1\ldots i_m})$，故$G_{km}$是局部欧的.



(2) G_{km}为T_2空间.

设$p, q \in G_{km}$, $p \neq q$. 不妨设$p \in \pi(U_{1\ldots m})$，$O(\varphi_{1\ldots m}(p), \delta)$为$\boldsymbol{R}^{km}$中以$\varphi_{1\ldots m}(p)$为中心，以$\delta > 0$为半径的球，使得$q \overline{\in} \varphi_{1\cdots m}^{-1}(K)$，其中$K = \overline{O(\varphi_{1\ldots m}(p), \delta)} \subset \boldsymbol{R}^{km}$.

设$\tilde{\varphi}_{1\cdots m}^{-1}(K) \ni (P_n, Q_n) \to (P, Q) \in T(m, m+k; m)$，$\tilde{\varphi}_{1\ldots m}(P_n, Q_n) \in K$. 因为$K \subset \boldsymbol{R}^{km}$紧致，故存在子列$\tilde{\varphi}_{1\ldots m}(P_{n_l}, Q_{n_l}) = P_{n_l}^{-1} Q_{n_l} \to R \in K$. 于是$Q = \lim\limits_{l \to +\infty} Q_{n_l} = \lim\limits_{l \to +\infty} P_{n_l} \cdot \tilde{\varphi}_{1\ldots m}(P_{n_l}, Q_{n_l}) = PR$. 所以，$(P, Q) = (P, PR) = P(I, R)$，$m = \operatorname{rank}(P, Q) = \min\{\operatorname{rank} P, \operatorname{rank}(I, R)\} \leqslant m$，因而$\operatorname{rank} P = m$和$(P, Q) \in U_{1\ldots m}$. 又因为$\tilde{\varphi}_{1\ldots m}$连续，$K$紧致，故$\tilde{\varphi}_{1\ldots m}(P, Q) = \lim\limits_{n \to +\infty} \tilde{\varphi}_{1\ldots m}(P_n, Q_n) \in K$，$(P, Q) \in \tilde{\varphi}_{1\cdots m}^{-1}(K)$. 这就证明了$\tilde{\varphi}_{1\cdots m}^{-1}(K)$为$T(m, m+k; m)$中的闭集. 再由$\pi^{-1}(\varphi_{1\cdots m}^{-1}(K))$

$=(\varphi_{1\cdots m}\circ\pi)^{-1}(K)=\tilde{\varphi}_{1\cdots m}^{-1}(K)$和商拓扑的定义，$\varphi_{1\cdots m}^{-1}(K)$ 也为 G_{km} 中的闭集．于是 $\varphi_{1\cdots m}^{-1}(0(\varphi_{1\cdots m}(p),\delta)$ 和 $G_{km}-\varphi_{1\cdots m}^{-1}(K)$分别为 p 和 q 的不相交的开邻域，从而 G_{km} 为 T_2 空间(另一证法参阅[Milnor, J. W. and Stasheff, J. D. P57])．

(3) G_{km} 为 C^ω 流形．

设 Q 为 $m\times k$ 矩阵，A 为 $m\times(m+k)$矩阵，$A_{i_1\cdots i_m}$ 表示 A 中第 $i_1,\cdots,i_m$ 列所组成的子矩阵，$A_{\widehat{i_1\cdots i_m}}$ 表示 A 中划去第 $i_1,\cdots,i_m$ 列所组成的矩阵．令 $A_{i_1\cdots i_m}=I, A_{\widehat{i_1\cdots i_m}}=Q$.

当 $\pi(U_{i_1\cdots i_m})\cap\pi(U_{j_1\cdots j_m})\neq\varnothing$时，由

$$\tilde{Q}=\varphi_{j_1\cdots j_m}\circ\varphi_{i_1\cdots i_m}^{-1}(Q)=\varphi_{j_1\cdots j_m}(\pi(A))=A_{j_1\cdots j_m}^{-1}A_{\widehat{i_1\cdots j_m}}$$

可知，$\tilde{Q}$ 中的元素为 Q 中元素的有理函数，故 $\varphi_{j_1\cdots j_m}\circ\varphi_{i_1\cdots i_m}^{-1}$ 是C^ω类的．

由(1)(2)(3)和定理 1，$\mathscr{D}'=\{(\pi(U_{i_1\cdots i_m}),\ \varphi_{i_1\cdots i_m})|_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant m+k}\}$唯一确定了 G_{km} 上的一个 km 维 C^ω 流形(G_{km}, $\mathscr{D}$)，称它为 Grassmann 流形．

(4) G_{km} 为A_2(具有可数拓扑基)空间．

由(1)$\pi(U_{i_1\cdots i_m})$同胚于 $\mathbf{R}^{km}$，故 $\pi(U_{i_1\cdots i_m})$为 A_2 空间，设它的可数拓扑基为 $\{V^l_{i_1\cdots i_m}|l\in N\}$．又因 $\pi(U_{i_1\cdots i_m})$为 G_{km} 的开集且 $G_{km}=\bigcup\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant m+k}\pi(U_{i_1\cdots i_m})$，故 $\tau^*=\{V^l_{i_1\cdots i_m}|_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant m+k},\ l\in N\}$ 为 G_{km} 的可数拓扑基，这就证明了 G_{km} 为 A_2 空间．

(5) G_{km} 为紧致集．

设 $L=\{A\in T(m,m+k;m)|A$的行向量模为 1 且彼此正交$\}$，显然它是$\mathbf{R}^{m(m+k)}$中的有界闭集，即为紧致集．由 Gram-Schmidt 正交化过程，对任何 $A\in T(m,m+k;m)$，必存在 $B\in L$ 使$A=CB$，其中 C 为 $m\times m$非异矩阵．于是 $\pi(L)=G_{km}$．从 L紧致和 π 连续可知 G_{km} 也是紧致集．

考虑另一证法也是有趣的．令 $S=\{A\in T(m,m+k;m)\mid$ $\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m+k}a_{ij}^2}=1\}$，显然，$S\subset T(m,m+k;m)$ 为有界闭集，因而是紧致集．此外，对任何 $\pi(A)\in G_{km}$，$A\in U_{i_1\cdots i_m}$，显然有 $\left\|\frac{A}{\|A\|}\right\|=1$，$\frac{A}{\|A\|}\in S$ 和 $\pi\left(\frac{A}{\|A\|}\right)=\pi\left(\frac{I_m}{\|A\|}A\right)=\pi(A)$，故 $G_{km}\subset\pi(S)$．另一方面，因为 $\pi(S)\subset\pi(T(m,m+k;\ m))=G_{km}$，所以，$\pi(S)=G_{km}$．它作为紧致集 S 在连续映射 π 下的象是紧致的．

例 8 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^r 流形，$\mathscr{D}_i=\{(U_{\alpha_i},\varphi_{\alpha_i})\mid\alpha_i\in\Gamma_i\}$，$i=1,\cdots,k$．令

$$\mathscr{D}'=\{(U_{\alpha_1}\times\cdots\times U_{\alpha_k},\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_k})\mid(U_{\alpha_i},\varphi_{\alpha_i})\in\mathscr{D}_i,\ i=1,\cdots,k\},$$

其中 $U_{\alpha_1}\times\cdots\times U_{\alpha_k}$ 为拓扑积，而

$\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_k}:U_{\alpha_1}\times\cdots\times U_{\alpha_k}\to\varphi_{\alpha_1}(U_{\alpha_1})\times\cdots\times\varphi_{\alpha_k}(U_{\alpha_k})\subset\boldsymbol{R}^{n_1}\times\cdots\times\boldsymbol{R}^{n_k}=\boldsymbol{R}^{n_1+\cdots+n_k}$，

$$\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(p_1,\cdots,p_k)=(\varphi_{\alpha_1}(p_1),\cdots,\varphi_{\alpha_k}(p_k))$$

为同胚映射．显然 $\mathscr{D}'$ 满足定义 1 中条件(1)和(2)，因此它唯一确定了拓扑积 $M_1\times\cdots\times M_k$ 上的 C^r 构造 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_1\times\cdots\times\mathscr{D}_k$，我们称 $n_1+\cdots+n_k$ 维 C^r 流形 $(M_1\times\cdots\times M_k,\ \mathscr{D}_1\times\cdots\times\mathscr{D}_k)$ 为 C^r 流形 $(M_i,\mathscr{D}_i)$，$i=1,\cdots,k$ 的 **C^r 积流形**．如 n 维环面 $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}$ 为 n 个 S^1 的 n 维 C^∞ 积流形，$\boldsymbol{R}^{n_1+n_2}=\boldsymbol{R}^{n_1}\times\boldsymbol{R}^{n_2}$ 为 $\boldsymbol{R}^{n_1}$ 和 $\boldsymbol{R}^{n_2}$ 的 C^∞ 积流形．

最后，我们证明流形上连通和道路连通是等价的．

定理 3 设 $(M,\ \mathscr{D}^0)$ 为拓扑流形，则 M 连通 $\Longleftrightarrow M$ 道路连通．

证明 $(\Rightarrow)$ 对任何 $p\in M$，令 $C_p=\{q\in M\mid$ 存在 C^0 道路将 p,q 相连$\}$．设 $q\in C_p$，因 M 为拓扑流形，故存在 q 的局部坐标系 $(U,$

φ)，使 $\varphi(U)=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2<1\}\subset\boldsymbol{R}^n$. 由于 $\varphi(U)$ 中任两点有一条直线道路相连，所以 U 中任一点必与 q 相连，从而 U 中任一点必与 p 相连和 $U\subset C_p$，这就证明了 C_p 为 M 中的开集. 显然，当 $p\in M$ 时，C_p 是彼此不相交或重合的. 若有 $C_p\cap C_q=\varnothing$，则 $M=C_p\cup\left(\bigcup_{s\in M-\{p\}}C_s\right)$，$C_q\subset\bigcup_{s\in M-\{p\}}C_s$，即 M 为两不相交的非空开集的并，这与 M 连通相矛盾，故 $C_p=M$，这就证明了 M 是道路连通的.

($\Leftarrow$)(反证)假设 M 不连通；则存在不相交的非空开集 U,V，使 $M=U\cap V$. 设 $p\in U$, $q\in V$，因为 M 道路连通，故存在 C^0 道路 $\sigma:[0,1]\to M$ 使 $\sigma(0)=p$, $\sigma(1)=q$，显然 $\sigma^{-1}(U)$ 和 $\sigma^{-1}(V)$ 为 $[0,1]$ 的两个不相交的非空开集，且 $[0,1]=\sigma^{-1}(M)=\sigma^{-1}(U)\cup\sigma^{-1}(V)$，这与熟知的 $[0,1]$ 连通相矛盾. #

§2 C^k 映射

在§1中已提到 C^k 映射 $f:U\to\boldsymbol{R}^m$，其中 U 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，$k\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$. 现在我们将它推广到流形上，并定义浸入、嵌入和微分同胚等重要概念.

定义1 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^r 流形，$i=1,2$；$k,r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$，$k\leqslant r$. 如果映射 $f:M_1\to M_2$，对任意 $p\in M_1$ 和 $q=f(p)$ 的任意局部坐标系 (V,ψ)，必有 p 的局部坐标系 (U,φ)，使 $f(U)\subset V$（等价于 f 是连续的），且 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 是 C^k 类的，即

$$\begin{cases}y^1=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_1(x^1,\cdots,x^{n_1})\\ \cdots\\ y^{n_2}=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{n_2}(x^1,\cdots,x^{n_1})\end{cases}$$

是 C^k 类的，则称 f 为从 M_1 到 M_2 的 **C^k 映射**，记作 $f\in C^k(M_1,M_2)$，其中 $C^k(M_1,M_2)$ 为从 M_1 到 M_2 的 C^k 映射的全体(图3).

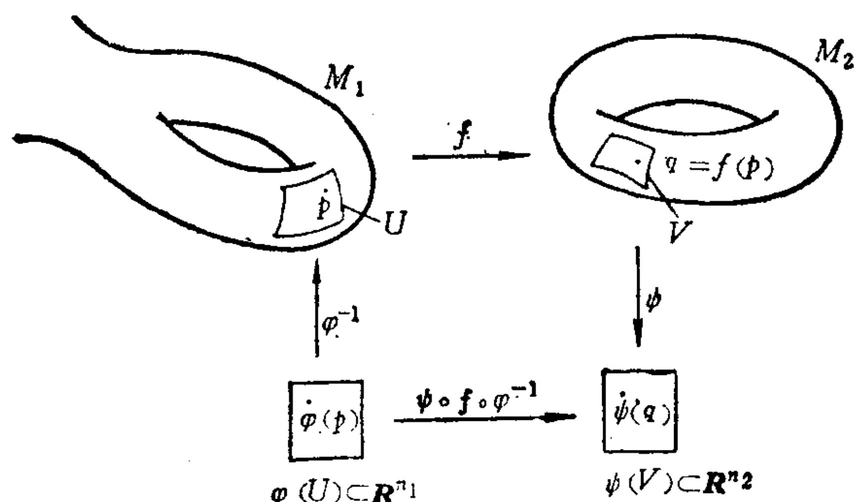


图 3

定理 1 设$(M_i, \mathscr{D}_i)$为n_i维C^r流形，$\mathscr{D}_i'$为$\mathscr{D}_i$的基，$i=1, 2$. 如果映射$f: M_1\to M_2$关于$\mathscr{D}_1'$和$\mathscr{D}_2'$满足定义1中的条件，则f是C^k类的($k\leqslant r$).

证明 设$p\in M_1$，$q=f(p)$，$(V, \psi)\in\mathscr{D}_2$是$q$的任意局部坐标系. 取$(V_1, \psi_1)\in\mathscr{D}_2'$为$q$的局部坐标系，由题设必有$p$的局部坐标系$(U_1, \varphi_1)\in\mathscr{D}_1'$使$f(U_1)\subset V_1$，且

$$\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1)\to\psi_1(V_1)$$

是C^k类的. 于是，存在p的局部坐标系$(U, \varphi_1|_U)\in\mathscr{D}_1$使$U\subset U_1$，$f(U)\subset V\cap V_1\subset V$，显然，

$$\psi\circ f\circ(\varphi_1|_U)^{-1}=(\psi\circ\psi_1^{-1})\circ(\psi_1\circ f\circ(\varphi_1|_U)^{-1}): \varphi_1(U)\to\psi(V)$$

是C^k映射，因而f是C^k类的. #

引理 1 设(U, φ)和(U_1, φ_1)为p的局部坐标系，(V, ψ)和(V_1, ψ_1)为$f(p)$的局部坐标系. 与(U, φ)和(V, ψ)相应的局部坐标分别为$\{x^i\}$和$\{y^j\}$，而$D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}=\left(\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$ 为$C^k(k\geqslant 1)$映射f在p点关于$\{x^i\}$和$\{y^j\}$的 Jacobi 矩阵，则

$$\operatorname{rank} D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}=\operatorname{rank} D(\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1})_{\varphi_1(p)}.$$

证明 因为

$D(\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1})_{\varphi_1(p)}=D(\psi_1\circ\psi^{-1})_{\psi(f(p))}\cdot D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\cdot D(\varphi\circ\varphi_1^{-1})_{\varphi_1(p)}$，而 $\text{rank}D(\varphi\circ\varphi_1^{-1})_{\varphi_1(p)}=n_1$，$\text{rank}D(\psi_1\circ\psi^{-1})_{\psi(f(p))}=n_2$，所以

$$\text{rank}D(\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1})_{\varphi_1(p)}=\text{rank}D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}. \qquad \#$$

由引理 1，我们给出

定义 2 $\text{rank}D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}$（与局部坐标系选取无关）称为 $C^k(k\geqslant1)$映射 f 在 p 点的**秩**，记作

$$(\text{rank } f)_p=\text{rank}D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

引进 C^k 映射 f 在 p 点的秩后，就可介绍 C^k 浸入、嵌入和微分同胚等概念了.

定义 3 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为 n_i 维 C^r 流形，$i=1,2$. 如果 $C^k(1\leqslant k\leqslant r)$映射

$$f:M_1\to M_2$$

对任何 $p\in M_1$，有$(\text{rank } f)_p=n_1$（因而 $n_1\leqslant n_2$），则称 f 为一个 **C^k 浸入**；如果 f 是 C^k 浸入，且

$$f:M_1\to f(M_1)\subset M_2$$

为同胚映射，则称 f 为一个 **C^k 嵌入**；如果 f 是 C^k 浸入，且

$$f:M_1\to M_2$$

为同胚映射，则称 f 为一个 **C^k 微分同胚**. 由数学分析知识不难证明 $n_1=n_2$. 再由反函数定理，f^{-1} 也是一个 C^k 微分同胚.

例 1 设 $f:\mathbf{R}^n\longrightarrow\left\{x=(x^1,\cdots,x^n)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m}(x^i)^2<1\right\}$，

$$x\longmapsto y=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}},$$

则 $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y}{\sqrt{1-\|y\|^2}}$. 显然 f 为 C^ω 同胚.

例 2 在§1 例 4 中，用第二种观点，令$\pi:S^n\to P^n(\mathbf{R})$，$\pi(x)$

$=[x]$. 不妨设$x=(x^1,\cdots,x^{n+1})$，$x^l<0,x^k\neq0$，于是由$\varphi_k\circ\pi\circ(\varphi_l^-)^{-1}(x^1,\cdots,x^{l-1},x^{l+1},\cdots,x^{n+1})=\varphi_k\circ\pi(x)=\varphi_k([x])=x^k\cdot|x^k|^{-1}(x^1,\cdots,x^{k-1},x^{k+1},\cdots,x^{n+1})=(\xi_k^1,\cdots,\xi_k^n)$. 由于$x^l=-\sqrt{1-\sum\limits_{i\neq l}(x^i)^2}$可知$\xi_k^1,\cdots,\xi_k^n$为$x^1,\cdots,x^{l-1},x^{l+1},\cdots,x^{n+1}$的$C^\omega$函数，故$\pi$是$C^\omega$映射. 易证$\pi$是局部(不是整体)$C^\omega$微分同胚.

例3 在§1例7中，$\pi:T(m,m+k;m)\to G_{km}$，$\pi(A)=[A]$. 设$A\in U_{i_1\cdots i_m}$，则$Q=\varphi_{i_1\cdots i_m}\circ\pi\circ\mathrm{Id}_{T(m,m+k;m)}(A)=\varphi_{i_1\cdots i_m}(\pi(A))=A_{i_1\cdots i_m}^{-1}\cdot A_{\widehat{i_1\cdots i_m}}$，显然$Q$的每个元素为$A$的元素的有理函数，故$\pi$是$C^\omega$映射.

例4 令$h:G_{km}\to G_{mk}$，它将$\mathbf{R}^{m+k}$中过原点的m维向量子空间映成其正交补空间，显然h是一一映射. 为了证明h是C^ω的，我们令

$g_{1\cdots m}:U_{1\cdots m}\to T(k,m+k;k)$

$(P,Q)\mapsto(-(P^{-1}Q)',I_k)$ （A'表示A的转置），显然，$g_{1\cdots m}$是C^ω的. 因为

$$(P,Q)(-(P^{-1}Q)'I_k)'=(P,Q)\begin{pmatrix}-P^{-1}Q\\ I_k\end{pmatrix}=-P(P^{-1}Q)+QI_k$$

$=-Q+Q=0$，所以(P,Q)的行向量都正交于$(-(P^{-1}Q)',I_k)$的行向量，即后者是前者的正交补. 又从

$$g_{1\cdots m}(P,Q)=(-(P^{-1}Q)',I_k)=(-((CP)^{-1}(CQ))',I_k)$$
$$=g_{1\cdots m}(CP,CQ)$$

可知$g_{1\cdots m}$诱导出$h|_{\pi(U_{1\cdots m})}:\pi(U_{1\cdots m})\to\tilde{\pi}(V_{m+1,\cdots,m+k})$，

$\pi(I,Q)\longmapsto\tilde{\pi}(-Q',I_k)$，其中$G_{mk}$，$\tilde{\pi}$，$V_{j_1\cdots j_k}$与$G_{km}$，$\pi$，$U_{i_1\cdots i_m}$类似定义. 于是，

$$\tilde{Q}=\tilde{\varphi}_{m+1,\cdots,m+k}\circ h|_{\pi(U_{1\cdots m})}\circ\varphi_{1\cdots m}^{-1}(Q)$$
$$=\tilde{\varphi}_{m+1,\cdots,m+k}\circ h|_{\pi(U_{1\cdots m})}(\pi(I_m,Q))$$

$$=\tilde{\varphi}_{m+1,\cdots,m+k}(\tilde{\pi}(-Q',I_k))=I_k^{-1}(-Q')=-Q',$$

因而 $\tilde{Q}$ 的元素为 Q 的元素的 C^ω 函数和 $h|_{\pi(U_{1\cdots m})}$ 为C^ω映射. 同理 $h|_{\pi(U_{i_1\cdots i_m})}$ 为 C^ω 映射，这就证明了 h 为 C^ω 映射. 由于互为正交补，故 h^{-1} 也为 C^ω 映射，从而 $h:G_{km}\to G_{mk}$ 是 C^ω 同胚的.

例 5 设 $g,h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为同胚，则 $\mathscr{D}'_g=\{(\mathbf{R}^n,g)\}$确定了一个 $C^r(r\geq 1)$微分构造 $\mathscr{D}_g$，同理$\mathscr{D}'_h=\{(\mathbf{R}^n,h)\}$也确定了一个 C^r 微分构造 $\mathscr{D}_h$.

如果 $g\circ h^{-1}\overline{\in}C^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$，则 $\mathscr{D}'_g$ 与 $\mathscr{D}'_h$不相容，所以，$\mathscr{D}_g\neq\mathscr{D}_h$. 但由 $g\circ(g^{-1}\circ h)\circ h^{-1}=\mathrm{Id}_{R^n}\in C^r(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$，$\mathrm{rankId}_{R^n}=n$ 得到 $g^{-1}\circ h:(\mathbf{R}^n,\mathscr{D}_h)\to(\mathbf{R}^n,\mathscr{D}_g)$为 C^r 微分同胚.

特别如 g，h：$\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$，$g(x)=x$，$h(x)=x^3$，$y=g\circ h^{-1}(x)=g(x^{\frac{1}{3}})=x^{\frac{1}{3}}$在$x=0$处不可导，故$g\circ h^{-1}\overline{\in}C^1(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1)$，且$\mathscr{D}_g\neq\mathscr{D}_h$.

例 6 设 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^2,f(t)=(t^2,\sin t\pi)$，由 $\mathrm{rank}(2t,\pi\cos t\pi)=1$ 和$f(1)=(1,0)=f(-1)$可知 f 为浸入但非单射.

在初等微分几何中，我们研究了 $\mathbf{R}^n$ 中的大量光滑曲线、光滑曲面的例子. 下面将它们推广为微分流形上的子流形和正则子流形.

定义 4 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为 n_i 维 $C^r(r\geq 1)$流形，$i=1,2$，$M_1\subset M_2$（M_1 的拓扑不必为 M_2 的诱导拓扑，称为 M_1 的内部拓扑）. 如果包含映射 $I:M_1\to M_2,I(p)=p$ 为 C^r 浸入，则称$(M_1,\mathscr{D}_1)$为$(M_2,\mathscr{D}_2)$的 **C^r 子流形**（简称 M_1 为 M_2 的 C^r 子流形）；如果包含映射 I 为 C^r 嵌入，则称$(M_1,\mathscr{D}_1)$为$(M_2,\mathscr{D}_2)$的 **C^r 正则子流形**. 此时，$I:M_1\to M_1\subset M_2$ 为同胚映射，即 M_1 的内部拓扑和诱导拓扑是相同的.

定理 2 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为 n_i 维 $C^r(r\geq 1)$流形，$i=1,2$.

(1) 如果 f：$M_1\to M_2$ 为C^r 单浸入（单射且为浸入），则

$(f(M_1), \widetilde{\mathscr{D}}_1)$为$(M_2, \mathscr{D}_2)$的 C^r 子流形，其中$\widetilde{\mathscr{D}}_1=\{(f(U), \varphi\circ f^{-1}) \mid (U, \varphi)\in\mathscr{D}_1\}$，$f^{-1}: f(M_1)\to M_1$ 为f 的逆映射.

（2）如果 $f: M_1\to M_2$ 为C^r 嵌入，则$(f(M_1), \widetilde{\mathscr{D}}_1)$为$(M_2, \mathscr{D}_2)$的 C^r 正则子流形.

证明　(1)设 I: $f(M_1)\to M_2$ 为包含映射，则对任何$(f(U), \varphi\circ f^{-1})\in\widetilde{\mathscr{D}}_1$和任何$(V, \psi)\in\mathscr{D}_2$，

$$\psi\circ I\circ(\varphi\circ f^{-1})^{-1}=\psi\circ I\circ(f^{-1})^{-1}\circ\varphi^{-1}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$$

是 C^r 类的，且 $\operatorname{rank} I=\operatorname{rank} f=n_1$，所以 I 是 C^r 浸入，从而 $(f(M_1), \widetilde{\mathscr{D}}_1)$为$(M_2, \mathscr{D}_2)$的 C^r 子流形.

（2）如果 f 为嵌入，显然 $f(M_1)$的内部拓扑和由 M_2 得到的诱导拓扑是相同的．再由(1)可知，$(f(M_1), \widetilde{\mathscr{D}}_1)$为$(M_2, \mathscr{D}_2)$的$C^r$ 正则子流形.　　#

为了给出正则子流形几何上的充分必要条件，我们先证明一个引理.

引理 2　设$(M_i, \mathscr{D}_i)$为 n_i 维 $C^r(r\geqslant 1)$流形，$i=1,2$，如果 f: $M_1\to M_2$ 为 C^r 映射且$(\operatorname{rank} f)_p=n_1(n_1\leqslant n_2)$．则

（1）对于 $q=f(p)$的任意局部坐标系$\{y^1, \cdots, y^{n_2}\}$，当 y^i 适当地交换次序后，$\{y^1\circ f, \cdots, y^{n_1}\circ f\}$为 p 的局部坐标系.

（2）对于 p 的任意局部坐标系$\{x^1, \cdots, x^{n_1}\}$，可在 $q=f(p)$适当选取局部坐标系$\{z^1, \cdots, z^{n_2}\}$使得 $x^i=z^i\circ f(i=1, \cdots, n_1)$在 p 的充分小邻域内成立.

证明　(1) 在 p 点任意取定一个局部坐标系 (U, φ)，$\{x^i\}$，因为$(\operatorname{rank} f)_p=n_1$，所以

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^j}\right)_{\varphi(p)}=n_1$$

当$\{y^1, \cdots, y^{n_2}\}$适当交换次序后，可以使

$$\left.\frac{\partial(y^1\circ f,\cdots,y^{n_1}\circ f)}{\partial(x^1,\cdots,x^{n_1})}\right|_{\varphi(p)}\neq 0.$$

由 $y^i\circ f$关于 $x^1,\cdots,x^{n_1}$ 有连续偏导数及反函数定理，可推出$\{y^1\circ f,\cdots,y^{n_1}\circ f\}$是 p 的局部坐标系.

(2) 在$q=f(p)$点任意取定一个局部坐标系(V,ψ)，$\{y^1,\cdots,y^{n_2}\}$，由(1)可使得$\{y^1\circ f,\cdots,y^{n_1}\circ f\}$成为 p 的局部坐标系，故

$$x^i=\varphi^i(y^1\circ f,\cdots,y^{n_1}\circ f),\quad i=1,\cdots,n_1,$$

其中 φ^i为 C^r函数. 再设

$$z^j=\begin{cases}\varphi^j(y^1,\cdots,y^{n_1}), & j=1,\cdots,n_1,\\ y^j & ,\quad j=n_1+1,\cdots,n_2,\end{cases}$$

则

$$\left.\frac{\partial(z^1,\cdots,z^{n_2})}{\partial(y^1,\cdots,y^{n_2})}\right|_{\psi(q)}=\left.\frac{\partial(z^1,\cdots,z^{n_1})}{\partial(y^1,\cdots,y^{n_1})}\right|_{\psi(q)}=\left.\frac{\partial(\varphi^1,\cdots,\varphi^{n_1})}{\partial(y^1,\cdots,y^{n_1})}\right|_{\psi(q)}\neq 0.$$

由 z^j关于 $y^1,\cdots,y^{n_2}$有连续偏导数及反函数定理推出$\{z^j\}$ 是 q 的局部坐标系，且有 $x^i=z^i\circ f,i=1,\cdots,n_1.$ #

定理 3 （正则子流形的充要条件）设N为 n 维 $C^r(r\geqslant 1)$ 流形. 则

M为N的 m维 C^r正则子流形$\Longleftrightarrow M\subset N$ 为子拓扑空间，且对任意 $p\in M$，存在N的含 p 的局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$及其局部坐标邻域U，使得

$$M\cap U=\{q\in U\mid x^j(q)=0,m+1\leqslant j\leqslant n\}.$$

证明 ($\Leftarrow$)设$M\subset N$ 为子拓扑空间. 对任意 $p\in M$，(U_p,φ_p)，$\{x^1,\cdots,x^n\}$为满足右边条件的 p 点的关于N的局部坐标系. 记 $\boldsymbol{R}^m=\{(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)\}\subset\boldsymbol{R}^n$，则$\varphi_p(M\cap U_p)=\varphi_p(U_p)\cap\boldsymbol{R}^m$. 由 $\varphi_p(U_p)$为 $\boldsymbol{R}^n$的开集，故 $\varphi_p(M\cap U_p)$为 $\boldsymbol{R}^m$的开集. 显然，

$$\varphi_p|_{M\cap U_p}:M\cap U_p\to\varphi_p(M\cap U_p)\subset\boldsymbol{R}^m$$

为拓扑映射. 于是, 由 §1 定理 1,

$$\mathscr{D}'_M=\{(M\cap U_p,\varphi_p|_{M\cap U_p})|_{p\in M}\}$$

确定了 M 上的一个 C^r 微分构造 $\mathscr{D}_M$. 事实上, 显然有

$$\bigcup_{p\in M}(M\cap U_p)=M\cap\left(\bigcup_{p\in M}U_p\right)=M\cap N=M.$$

此外, 当 $(M\cap U_p)\cap(M\cap U_q)\neq\varnothing$ 时, $(p,q\in M)$, 映射

$$\varphi_q|_{M\cap U_q}\circ\varphi_p|^{-1}_{M\cap U_p}:\varphi_p|_{M\cap U_p}(M\cap U_p\cap U_q)\to\varphi_q|_{M\cap U_q}(M\cap U_p\cap U_q)$$

$$(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)\longmapsto(y^1,\cdots,y^m,0,\cdots,0),$$

$$\begin{cases}y^1=(\varphi_q\circ\varphi_p^{-1})_1(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y^m=(\varphi_q\circ\varphi_p^{-1})_m(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)\end{cases}$$

是 C^r 类的, 同理 $\varphi_p|_{M\cap U_p}\circ\varphi_q|^{-1}_{M\cap U_q}$ 也是 C^r 类的. 再由

$$\varphi_p\circ I\circ\varphi_p|^{-1}_{M\cap U_p}:\varphi_p|_{M\cap U_p}(M\cap U_p)\to\varphi_p(U_p)$$

$$(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)\longmapsto(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)$$

可看出包含映射 $I: M\to N$ 为 C^r 嵌入, 这就证明了 M 为 N 的 C^r 正则子流形(图 4).

图 4

(⇒) 因为 M 为 N 的正则子流形, 所以包含映射 $I: M\to N$ 为一个嵌入, 由引理2, 在 p 点可取关于 N 的局部坐标系 (U,φ)、$\{x^1,\cdots,x^n\}$, 使得 $\{x^1\circ I,\cdots,x^m\circ I\}$ 为 p 点关于 M 的局部坐标系, 设 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ 和 $\{x^1\circ I,\ \cdots,\ x^m\circ I\}$ 的局部坐标邻域分别为 U_1 和 V. 因为 M

为N的正则子流形，所以可以取p点关于N的开邻域U_2，使得$U_2\subset U_1$，$M\cap U_2\subset V$. 显然，$x^k\circ I=g^k(x^1\circ I,\cdots,x^m\circ I)$，$m+1\leqslant k\leqslant n$是定义在$M\cap U_2$上的$C^r$函数. 这里$g^k$的定义域叙述如下：设$\varphi_1:U_2\to\boldsymbol{R}^m$，$\varphi_1(q)=(x^1(q),\cdots,x^m(q))$，$q\in U_2$，其中$(x^1(q),\cdots,x^n(q))=\varphi(q)$. 因此，$g^k$是定义在$\boldsymbol{R}^m$中的开集$\varphi_1(M\cap U_2)$上的$C^r$函数.

容易看出，若$q\in U_2$的坐标为$\{a^1,\cdots,a^n\}=\{x^1(q),\cdots,x^n(q)\}$，则 $q\in M\cap U_2\Longleftrightarrow q\in U_2,a^k=g^k(a^1,\cdots,a^m)$，$m+1\leqslant k\leqslant n$. 其次，在$p$点关于$N$的开邻域$U=\varphi_1^{-1}(\varphi_1(M\cap U_2))$上定义$n$个$C^r$函数：

$$\begin{cases}y^1=x^1\\ \cdots\cdots\\ y^m=x^m\\ y^{m+1}=x^{m+1}-g^{m+1}(x^1,\cdots,x^m)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y^n=x^n-g^n(x^1,\cdots,x^m)\end{cases}$$

我们令映射$\psi:U\to\boldsymbol{R}^n$为$\psi(q)=(y^1(q),\ \cdots,\ y^n(q))$，$q\in U$. 显然$\psi:U\to\psi(U)$是一对一的$C^r$映射，且

$$\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|_{\varphi(q)}=\det\begin{pmatrix}I_m & 0\\ * & I_{n-m}\end{pmatrix}=1,$$

由反函数定理可知ψ^{-1}也是C^r的，故ψ为C^r微分同胚且$\{y^1,\cdots,y^n\}$是以U为坐标邻域的关于N的局部坐标系. 于是，

$$\begin{aligned}\{q\in U\mid y^j(q)=0,m+1\leqslant j\leqslant n\}&=\{q\in U_2\mid\varphi_1(q)\in\varphi_1(M\cap U_2),\\ &\quad x^k(q)=g^k(x^1(q),\cdots,x^m(q)),m+1\leqslant k\leqslant n\}\\ &=M\cap U_2=M\cap U,\end{aligned}$$

其中最后一个等式是因为U_2为φ_1的定义域，故$U=\varphi_1^{-1}(\varphi_1(M\cap U_2))\subset U_2$，$M\cap U\subset M\cap U_2$；另一方面，由$M\cap U_2\subset U$可知$M\cap U_2\subset M\cap U$. 从而$M\cap U_2=M\cap U$. #

例 7 令 $f:S^1\times S^1\to \mathbf{R}^3$,

$f(e^{iu^1},e^{iu^2})=((b+a\cos u^1)\cos u^2,(b+a\cos u^1)\sin u^2,a\sin u^1)$,

$0<a<b$.

显然 f 是有确切定义的,且 $f:S^1\times S^1\to f(S^1\times S^1)$ 为同胚. 下面证明 f 是 C^∞ 浸入. 由对称性,只要对 $S^1\times S^1$ 的特殊局部坐标系

$$((S^1-\{e^{i0}\})\times(S^1-\{e^{i0}\}),\varphi),\varphi(e^{iu^1},e^{iu^2})=(u^1,u^2),$$

$0<u^1,u^2<2\pi$ 验证即可. 显然

$\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}\circ f\circ\varphi^{-1}(u^1,u^2)=((b+a\cos u^1)\cos u^2,(b+a\cos u^1)\sin u^2,$ $a\sin u^1)$ 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix}-a\sin u^1\cos u^2 & -(b+a\cos u^1)\sin u^2\\ -a\sin u^1\sin u^2 & (b+a\cos u^1)\cos u^2\\ a\cos u^1 & 0\end{pmatrix}$$

的秩为 2,故 f 为 C^∞ 嵌入. 由定理 2(2), $f(S^1\times S^1)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的 2 维正则子流形.

例 8 设 $f_1:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^2$

$$f_1(t)=(x(t),y(t))=\left(\frac{t(t^2+1)}{t^4+1},\frac{t(t^2-1)}{t^4+1}\right).$$

显然它的象是双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$. 容易验证 f_1 为单射且 $\mathrm{rank} f_1=\mathrm{rank}(x'(t),\ y'(t))=1$, 所以 f_1 为 C^∞ 单浸入. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_1(n)=(0,0)=f_1(0)$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_1^{-1}(f_1(n))=\lim\limits_{n\to+\infty}n\neq 0$, 故 f_1^{-1}: $f_1(\mathbf{R}^1)\to\mathbf{R}^1$ 在 $(0,0)$ 不连续,从而 $f_1:\mathbf{R}^1\to f_1(\mathbf{R}^1)$ 不是同胚,即 f_1: $\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^2$ 不是嵌入. 由定理 2(1), $f(\mathbf{R}^1)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的 1 维 C^∞ 子流形,而作为子拓扑空间不是流形,故不是 C^∞ 正则子流形 (图 5).

类似地, f_2: $\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^2$, $f_2(t)=(x(t),y(t))=\left(\frac{t(t^2+1)}{t^4+1},\right.$ $\left.\frac{-t(t^2-1)}{t^4+1}\right)$ 也是 C^∞ 单浸入而不是嵌入. 由定理 2, $f_2(\mathbf{R}^1)$ 为 $\mathbf{R}^2$

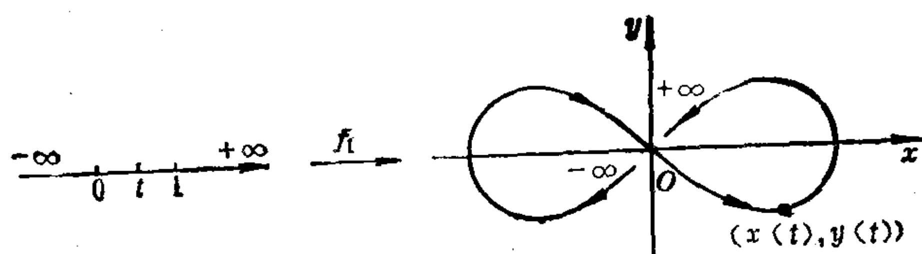


图 5

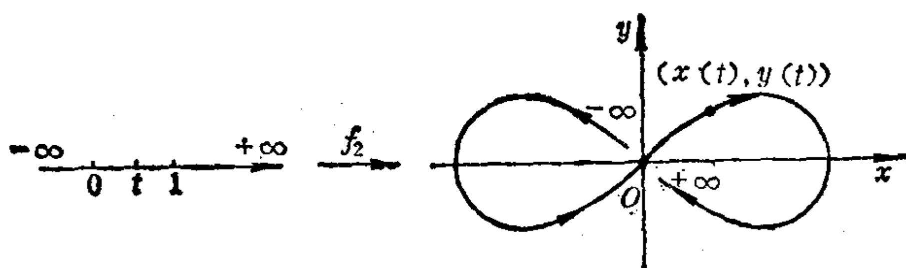


图 6

的 1 维 C^ω 子流形而不是 C^ω 正则子流形(图 6).

例 9 设 $T^2=S^1\times S^1=\{(e^{2\pi u^1 i}, e^{2\pi u^2 i})\mid u^1, u^2\in\mathbf{R}\}$ 为 2 维环面. 它可以由边长为 1 的正方形叠合对边而得到. 也可将平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点划分等价类, 使得 $(u^1,u^2)\sim(v^1,v^2)\Longleftrightarrow(v^1,v^2)=(u^1+k^1,u^2+k^2)$, $k^1,k^2\in\mathbf{Z}$.

令 $\theta:\mathbf{R}^2\to S^1\times S^1$, $\theta(u^1,u^2)=(e^{2\pi u^1 i}, e^{2\pi u^2 i})$, 则它导出商空间 $\mathbf{R}^2/\sim$ 到 $S^1\times S^1$ 上的一个同胚 $\hat{\theta}([(u^1,u^2)])=\theta(u^1,u^2)$, 其中 $[(u^1,u^2)]$ 为 (u^1,u^2) 的等价类.

考虑 C^ω 映射 $f:\mathbf{R}^1\to S^1\times S^1$, $f(t)=(e^{2\pi t i}, e^{2\pi\alpha t i})$.

当 α 为正无理数时, 我们证明 f 为单浸入, 且 $f(\mathbf{R}^1)$ 在 $S^1\times S^1$ 中是稠密的(图 7).

若 f 非单射, 则存在 $t_1, t_2\in\mathbf{R}$, $t_1\neq t_2$, 而 $(e^{2\pi t_1 i}, e^{2\pi\alpha t_1 i})=f(t_1)=f(t_2)=(e^{2\pi t_2 i}, e^{2\pi\alpha t_2 i})$, 于是 $t_1-t_2=k$, $\alpha(t_1-t_2)=l$, 其中 $k, l\in\mathbf{Z}$, $k\neq0$, 这就推出 $\alpha=\dfrac{l}{k}$ 为有理数, 与假设 α 为无理数相矛盾. 故 f 为单射.

设 $t_0\in\boldsymbol{R}$ 为任一点，取 $(u_0^1, u_0^2)\in\boldsymbol{R}^2$ 使 $\theta(u_0^1, \alpha u_0^2)=f(t_0)$. 令 $W=\left(u_0^1-\frac{1}{2}, u_0^1+\frac{1}{2}\right)\times\left(u_0^2-\frac{1}{2}, u_0^2+\frac{1}{2}\right)$, 则 $(\theta(W), \theta^{-1})$ 为 $f(t_0)$ 关于 $S^1\times S^1$ 的局部坐标系. 取 t_0 关于 $\boldsymbol{R}$ 的局部坐标邻域 U, 使得 $f(U)\subset\theta(W)$. 于是, f 在局部坐标系中表示为 $\theta^{-1}\circ f\circ \mathrm{Id}_R=\theta^{-1}\circ f: U\to W, \theta^{-1}\circ f(t)=(t, \alpha t)$, 从而 $(\mathrm{rank} f)_{t_0}=\mathrm{rank}(1, \alpha)=1$. 由 t_0 的任意性可见 f 为浸入.

对任意 $u, v\in(0,1)$, 取 $0<\varepsilon<\min\{v, 1-v\}$, 由下面的引理 3, 存在 $m, l\in\boldsymbol{Z}$, 使 $|v-\alpha u-m\alpha-l|<\varepsilon$. 令 $t=u+m$, 则从

$$|v-\{\alpha t\}-[\alpha t]-l|=|v-\alpha t-l|=|v-\alpha u-m\alpha-l|<$$
$$<\min\{v, 1-v\}$$

得到 $u=\{t\}$ 和 $|v-\{\alpha t\}|<\varepsilon$, 其中 $[t]$ 表示不超过 t 的最大整数, $\{t\}=t-[t]$. 这就意味着 $f(\boldsymbol{R}^1)$ 在 $S^1\times S^1$ 中是稠密的.

下面证明 $f(\boldsymbol{R}^1)$ 不是 1 维正则子流形因而 f 不是嵌入. 假设 $f(\boldsymbol{R}^1)$ 是 1 维正则子流形, 则对任意 $t_0\in\boldsymbol{R}^1$, 由定理 3, 存在 $f(t_0)$ 关于 $S^1\times S^1$ 的局部坐标邻域 (V, ψ) 使得 $\psi(V\cap f(\boldsymbol{R}^1))=\psi(V)\cap\{(x, 0)|x\in\boldsymbol{R}\}$, 显然它在 $\psi(V)$ 中不是稠密的. 但是由于 $f(\boldsymbol{R}^1)$ 在 $S^1\times S^1$ 中稠密, 故 $\psi(V\cap f(\boldsymbol{R}^1))$ 在 $\psi(V)$ 中稠密, 矛盾.

当 α 为正有理数时, 设 $\alpha=\frac{m}{n}$ (m, n 为互质的自然数), 则

$(e^{2\pi t_1 i}, e^{2\pi\alpha t_1 i})=(e^{2\pi t_2 i}, e^{2\pi\alpha t_2 i})\Longleftrightarrow t_1-t_2=k, \alpha(t_1-t_2)=\frac{m}{n}(t_1-t_2)=l$, 其中 $k, l\in\boldsymbol{Z}\Longleftrightarrow t_1-t_2=sn, s\in\boldsymbol{Z}$. 由此可见 $f(\boldsymbol{R}^1)$

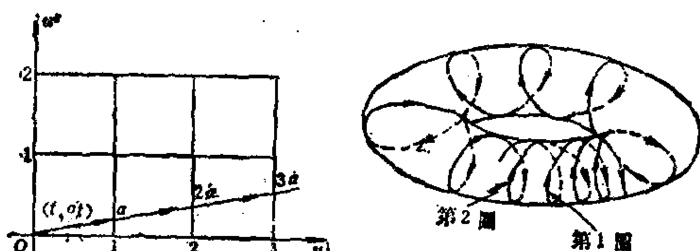


图 7

为 $S^1\times S^1$ 上的一条封闭曲线，它作为 $S^1\times S^1$ 的子拓扑空间同胚于 S^1. 不难验证 $f(\boldsymbol{R}^1)$ 为 $S^1\times S^1$的紧致的 1 维正则子流形(注意 f 非单射).

引理 3 设 α 为无理数，则对任意 $u\in\boldsymbol{R}$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 $m,\ l\in\boldsymbol{Z}$, 使得 $|u-m\alpha-l|<\varepsilon$.

证明 若 $k,s\in\boldsymbol{N}$, $k\neq s$, 而 $\{k\alpha\}=\{s\alpha\}$, 则

$$\alpha=\frac{(k-s)\alpha}{k-s}=\frac{\{k\alpha\}-\{s\alpha\}+[k\alpha]-[s\alpha]}{k-s}=\frac{[k\alpha]-[s\alpha]}{k-s}$$

为有理数，这与已知 α 为无理数相矛盾. 于是，$\{k\alpha\}=\{s\alpha\}$, $k,s\in\boldsymbol{N}\Longleftrightarrow k=s$. 故 $A=\{\{k\alpha\}\mid k\in\boldsymbol{N}\}$ 为 $(0,1)$ 中的无限集，从而必有 A 的聚点 $x\in[0,1]$. 对于任意 $n\in\boldsymbol{N}$, 必存在 $k,s\in\boldsymbol{N}$, 使 $\{k\alpha\}>\{s\alpha\}$ 且 $0<\{k\alpha\}-\{s\alpha\}<\frac{1}{n}$. 记 $m=k-s\in\boldsymbol{Z}$, 因为

$$\{(k-s)\alpha\}+[(k-s)\alpha]=(k-s)\alpha=\{k\alpha\}-\{s\alpha\}+[k\alpha]-[s\alpha],$$

$$-1<\{(k-s)\alpha\}-\{k\alpha\}+\{s\alpha\}=[k\alpha]-[s\alpha]-[(k-s)\alpha]<1,$$

所以 $0<\{m\alpha\}=\{(k-s)\alpha\}=\{k\alpha\}-\{s\alpha\}<\frac{1}{n}$. 由此可知，$\{\{m\alpha\}\mid m\in\boldsymbol{Z}\}$ 在 $[0,1]$ 中是稠密的.

对任意 $u\in\boldsymbol{R}$ 和 $\varepsilon>0$. 取 $n\in\boldsymbol{N}$, 使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$. 根据上述结论，存在 $m\in\boldsymbol{Z}$ 使 $|u-[u]-m\alpha-[m\alpha]|=|\{u\}-\{m\alpha\}|<\frac{1}{n}<\varepsilon$, 如果令 $l=[u]+[m\alpha]$, 则 $|u-m\alpha-l|<\varepsilon$. #

更一般情形，可以证明(参阅Hardy, G. H. and Wright, E.M., p. 375—393) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 整系数线性无关 $\Longleftrightarrow\{(\{t\alpha_1\},\ \cdots,\ \{t\alpha_n\})\mid t\in\boldsymbol{R}\}$ 在 $[0,1]^n=\underbrace{[0,1]\times\cdots\times[0,1]}_{n\text{个}}$ 中稠密.

类似于 $n=2$, $f:\boldsymbol{R}^1\to T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}$, $f(t)=(e^{2\pi\alpha_1 ti},\ \cdots,$

$e^{2\pi\alpha_n t i}$)为C^∞单浸入但不是嵌入，$f(\mathbf{R}^1)$在T^n中稠密，因而它不是1维正则子流形.

例 10 设M和N分别为m维和n维$C^r(r\geqslant 1)$流形，$f:M\to N$为C^r映射，则$F:M\to M\times N, F(p)=(p, f(p))$为$C^r$嵌入且$f$的图形

$$\mathrm{Gr}(f)=\{(p,f(p))\in M\times N\mid p\in M\}$$

为$m+n$维C^r积流形$M\times N$的m维C^r闭正则子流形.

设$p_0\in M$为任意一点，$q_0=f(p_0)$. 取p_0的局部坐标系为$(U,\varphi),\{x^i\}$，$q_0=f(p_0)$的局部坐标系为$(V,\psi),\{y^j\}$，则

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)\circ F\circ\varphi^{-1}(x)&=(\varphi,\psi)\circ F(p)=(\varphi,\psi)(p,f(p))\\&=(\varphi(p),\psi\circ f(p))=(x,\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x))=(x,y),\end{aligned}$$

因为$f\in C^r(M,N)$，故$F\in C^r(M,M\times N)$且

$$\mathrm{rank}F=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} & \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ I_m & \cdots & \cdots & \cdots\\ & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}=m.$$

$F:M\to F(M)$为同胚是明显的，因而F为C^r嵌入且$\mathrm{Gr}(f)=\{(p,f(p))\in M\times N\mid p\in M\}=F(M)$为$M\times N$的$m$维$C^r$正则子流形.

此外，如果$(p_n, f(p_n))\in M\times N$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(p_n, f(p_n))=(p,q)\in M\times N$，则由$\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=p$和$f$连续可推出$q=\lim\limits_{n\to+\infty}f(p_n)=f(p)$，故$(p,q)=(p,f(p))\in F(M)=\mathrm{Gr}(f)$.

下面的定理说明秩为定值l的$C^r(r\geqslant 1)$映射$f:M_1\to M_2$在某点q的非空逆象$f^{-1}(q)$是一个$\dim M_1-l$维的C^r正则子流形($\dim M_1$表示M_1的维数). 由此可构造出大量正则子流形.

定理 4 设M_i为n_i维$C^r(r\geqslant 1)$流形，$i=1,2$. $f:M_1\to M_2$为C^r映射. 如果对任意$p\in M_1$有

$$(\operatorname{rank} f)_p = l\text{（定值）},$$

则对任意 $q \in M_2$，逆象

$$f^{-1}(q) = \{p \in M_1 \mid f(p) = q\}$$

是空集或 M_1 的 $n_1 - l$ 维 C^r 正则子流形.

证明 设 $M = f^{-1}(q) \neq \varnothing$，$p \in M$. 记 p, q 处关于 M_1，M_2 的局部坐标系分别为 (U, φ)，$\{x^i\}$ 和 (V, ψ)，$\{y^j\}$. 在 p 的一个开邻域内，令

$$\theta^j = y^j \circ f, \qquad j = 1, \cdots, n_2.$$

显然 $\theta^1, \cdots, \theta^{n_1}$ 为 C^r 函数. 由于 $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \theta^j}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} = l$，所以可以适当改变局部坐标的次序，使

$$\left.\frac{\partial(\theta^1, \cdots, \theta^l)}{\partial(x^1, \cdots, x^l)}\right|_{\varphi(p)} \neq 0.$$

于是，$\{\theta^1, \cdots, \theta^l, x^{l+1}, \cdots, x^{n_1}\}$ 就成为 p 关于 M_1 的局部坐标系. 用它代替 $\{x^i\}$，则有 $\theta^i = x^i$，$i = 1, \cdots, l$. 由于在点 p 的某个凸开邻域 U_0 上，$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \theta^j}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} = l$，所以

$$0 = \frac{\partial(\theta^1, \cdots, \theta^l, \theta^j)}{\partial(x^1, \cdots, x^l, x^i)} = \det\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i} \end{pmatrix} = \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i},$$

$$i = l+1, \cdots, n_1;\ j = l+1, \cdots, n_2,$$

这就推出了 $\theta^{l+1}, \cdots, \theta^{n_2}$ 仅是 $x^1, \cdots, x^l$ 的函数. 设 $y^j(q) = a^j$，$j = 1, \cdots, n_2$，并可假定 $a^j = 0$（否则用 $y^j - a^j$ 代替 y^j），于是

$$\begin{aligned} M \cap U_0 &= \{p' \in U_0 \mid f(p') = q\} \\ &= \{p' \in U_0 \mid \theta^j(p') = 0,\ j = 1, \cdots, n_2\} \\ &= \{p' \in U_0 \mid x^i(p') = 0,\ i = 1, \cdots, l\}. \end{aligned}$$

因此，由定理 3 可以引进 C^r 流形构造，使 M 成为 M_1 的 $n_1 - l$ 维 C^r 正则子流形. #

例 11 设 $f:\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}\to\boldsymbol{R}^1$, $f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2$, 其中 $x=(x^1,\cdots,x^{n+1})$, 则 $(\text{rank}f)_x=\text{rank}(2x^1,\cdots,2x^{n+1})=1(x\in\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\})$, 因此, $S^n=\{x\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\}=f^{-1}(1)$ 为 $\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$ (从而也为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$)的 n 维 C^ω 正则子流形.

注 1 从定理 4 的证明可看出,如果 $\text{rank}f$ 在含 $M=f^{-1}(q)\neq\varnothing$ 的某开集中为常值 l, 则 $M=f^{-1}(q)$ 仍是 M_1 的 n_1-l 维 C^r 正则子流形. 但是,如果 $\text{rank}f$ 在 $M=f^{-1}(q)$ 上为常值 l, 并不能推出它为 M_1 的 n_1-l 维 C^r 正则子流形. 例如: $f:\boldsymbol{R}^1\to\boldsymbol{R}^1$, $f(x)=x^3$, $M=f^{-1}(0)=\{x\in\boldsymbol{R}^1\mid f(x)=x^3=0\}=\{0\}$, $\text{rank}f|_M=0$, 但 M 不是 $\boldsymbol{R}^1$ 的 1 维 C^r 正则子流形.

§ 3 单位分解

流形上积分的定义、Stokes 定理和向量从上度量的存在性定理的证明等都需要用到单位分解存在性定理. 因此它是近代数学中的一个重要工具. 下面介绍单位分解的概念和有关的定理.

定义 1 设 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 为 M 的子集族, 如果 $A\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha$, 则称 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 为 A 的一个**覆盖**. 如果 $\Gamma'\subset\Gamma$, 且 $A\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma'}U_\alpha$, 则称 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma'\}$ 为 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的一个**子覆盖**.

设 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 和 $\{V_\beta\mid\beta\in\Lambda\}$ 为 $A\subset M$ 的覆盖, 如果对任意 $\beta\in\Lambda$, 存在 $\alpha\in\Gamma$ 使 $V_\beta\subset U_\alpha$, 则称 $\{V_\beta\mid\beta\in\Lambda\}$ 为 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 的一个**精致**.

设 (M,τ) 为拓扑空间, $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 为 M 的一个子集族, 如果对任意 $p\in M$, 有 p 的一个开邻域 W_p, 使除有限个 α 外, $W_p\cap U_\alpha=\varnothing$, 则称 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 是**局部有限的**.

设(M,τ)为T_2空间，如果对M的每个开覆盖$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$($U_\alpha$为开集)都有局部有限的开精致$\{V_\beta|\beta\in\Lambda\}$($V_\beta$为开集)，则称$(M,\tau)$为**仿紧空间**

设(M,τ)为T_2空间，如果$G_k\in\tau$，闭包$\bar{G}_k$是紧致的，且$\bar{G}_k\subset G_{k+1}$，$k\in N$，$M=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$，则称$M$是$\sigma$紧的.

例1 紧致的T_2空间(M,τ)既是σ紧的(取$G_k=M$)，又是仿紧的(任何开覆盖必有有限的子开覆盖，它就是局部有限的精致).

定理1 (1) 如果(M,τ)是σ紧的，则它是仿紧的.

(2) 如果M是n维拓扑流形，且又是A_2空间(即具有可数拓扑基)，则它是σ紧的，因而也是仿紧的.

证明 (1) 设$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$为$M$的任何开覆盖. 对每个$k\in N\cup\{0\}$，考虑开集$(G_{k+2}-\bar{G}_{k-1})\cap U_\alpha$，$G_0=G_{-1}=\varnothing$. 这些集合覆盖紧致集$\bar{G}_{k+1}-G_k$，因此，我们可以选有限的子开覆盖$\{V_1^k,\cdots,V_{n(k)}^k\}$. 因为$\bigcup_{k=0}^{\infty}(\bar{G}_{k+1}-G_k)=M$，故$\{V_1^k,\cdots,V_{n(k)}^k|k=0,1,2,\cdots\}$为$M$的开覆盖且明显地它是$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$的开精致. 对于任何$x\in M$，设$G_{k+1}$是$x$的一个开邻域，显然$G_{k+1}\cap V_s^j=\varnothing$，$j>k+1$. 于是，$\{V_1^k,\cdots,V_{n(k)}^k|k=0,1,2,\cdots\}$是局部有限的. 这就证明了$(M,\tau)$是仿紧的.

(2) 对任何$p\in M$，取p的局部坐标邻域(W_p,φ_p)，使得$\varphi_p(W_p)=\{x\in R^n|\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2<1\}$. 由拓扑流形$M$是$T_2$空间，故开集$U_p=\varphi_p^{-1}\{x\in R^n|\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2<\frac{1}{2}\}$的闭包$\bar{U}_p=\varphi_p^{-1}\{x\in R^n|\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\leqslant\frac{1}{2}\}$是紧致的. 这就推出了$M$是局部紧的.

由于M为A_2空间，根据 Lindelöf 定理推出M的开覆盖$\{U_p|p\in M\}$有可数的子开覆盖$\{U_i=U_{p_i}|i=1,2,\cdots\}$. 应用归纳定义$G_k$如下：令$G_1=U_1$，则$\overline{G}_1=\overline{U}_1$是紧致的. 假定$G_k$已被定义，取$j>k$并使$\overline{G}_k\subset\bigcup\limits_{i=1}^{j}U_i$，令$G_{k+1}=\bigcup\limits_{i=1}^{j}U_i$，它是开集且$\overline{G}_{k+1}=\bigcup\limits_{i=1}^{j}\overline{U}_i$是紧致的. 显然，$\overline{G}_k\subset G_{k+1}$，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}U_i=M$，这就推出了$M$是$\sigma$紧的. ＃

引理 1 设$C^n(r)=\{x\in R^n||x^i|<r,i=1,\cdots,n\}$，则存在$C^\infty$函数$f:R^n\longrightarrow R$，使得

$$f\Big|_{\overline{C^n(\frac{1}{2})}}=1,\qquad 0<f|_{C^n(1)}\leqslant 1,\qquad f|_{R^n-C^n(1)}=0.$$

证明 由§1引理 1 可知

$$\varphi(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}}, & t>0,\\ 0\ \ , & t\leqslant 0\end{cases}$$

是C^∞类的. 令

$$g(t)=\frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+\varphi(1-t)}\begin{cases}=0, & t\leqslant 0,\\ >0, & 0<t<1,\\ =1, & t\geqslant 1,\end{cases}$$

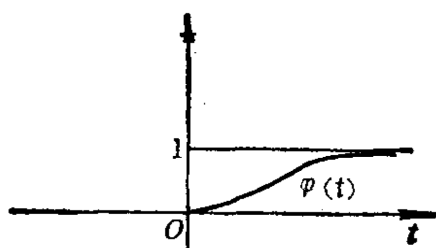
且当$0<t<1$时，$g'(t)>0$. 再令

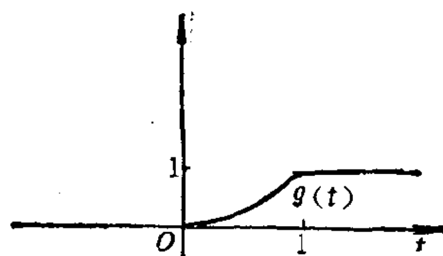
$$h(t)=g(2t+2)\cdot g(-2t+2)\begin{cases}=0, & |t|\geqslant 1,\\ >0, & |t|<1,\\ =1, & |t|\leqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

于是，

$$f(x^1,\cdots,x^n)=h(x^1)\cdots h(x^n)$$

为所求的C^∞函数(图 8). ＃





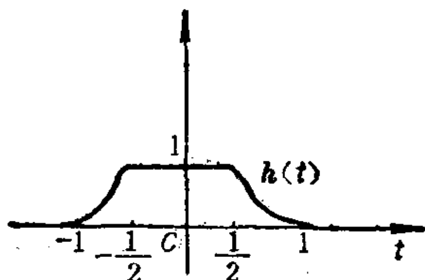


图 8

引理 2 设U为n维C^r流形$(M,\mathscr{D})$的开子集$(1\leqslant r\leqslant\infty)$，$A$为$M$的紧致子集，且$A\subset U$. 则存在$C^r$函数$\psi:M\to\mathbf{R}$，使得$\psi|_M\geqslant 0$，$\psi|_A>0$且在含$M-U$的某个开集内为0.

证明 对于任意$p\in A$，选取p的局部坐标系(U_p,φ_p)，使得$\overline{U}_p\subset U$且$\varphi_p(p)=0$，$\overline{C^n(1)}\subset\varphi_p(U_p)$(至多再作一个线性变换). 应用引理 1 中的$f$，令

$$\psi_p(q)=\begin{cases}f(\varphi_p(q)), & q\in U_p\\ 0, & q\in M-\overline{\varphi_p^{-1}(C^n(1))}.\end{cases}$$

显然，$\psi_p:M\to\mathbf{R}$是C^r类的，且$\psi_p(p)=f(\varphi_p(p))=f(0)=1$. 此外，设$V_p=\varphi_p^{-1}\left(C^n\left(\frac{1}{2}\right)\right)$，因为$A$紧致，$A\subset\bigcup_{p\in A}V_p$，所以存在$V_{p_1},\cdots$，

V_{p_k}使$A\subset\bigcup_{i=1}^{k}V_{p_i}$. 于是，$\psi: M\to\mathbf{R}$, $\psi=\psi_{p_1}+\cdots+\psi_{p_k}$ 是C^r类的，

$\psi|_{M\geqslant 0}$, $\psi(q)=\sum_{i=1}^{k}\psi_{p_i}(q)>0 \quad (q\in A)$，且$\psi$在含$M-U$的开集

$M-\bigcup_{i=1}^{k}\overline{U}_{p_i}$内为0. #

定义 2 设$\{g_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$为$n$维$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$流形$(M,\mathscr{D})$上的一族$C^r$函数($\Gamma$为指标集，不必是至多可数集). 如果它满足:

(1) g_α的支柱$\mathrm{Supp}g_\alpha=\overline{\{x\in M|g_\alpha(x)\neq 0\}}$是紧致的;

(2) $\{\mathrm{Supp}g_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$是局部有限的;

(3) $\sum_{\alpha\in\Gamma}g_\alpha(x)=1, g_\alpha(x)\geqslant 0, x\in M, \alpha\in\Gamma$.

则称$\{g_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$为$(M,\mathscr{D})$的一个**单位(1的)分解**.

设$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$为$n$维$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$流形$(M,\mathscr{D})$上的一个局部有限的开覆盖，$\{g_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$为$(M,\mathscr{D})$的一个单位分解. 如果$\mathrm{Supp}g_\alpha\subset U_\alpha$, $\alpha\in\Gamma$，则称$\{g_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$**为从属于$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$的一个单位分解**.

定理 2 n维σ紧的$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$流形$(M,\mathscr{D})$上存在一个单位分解$\{g_i|i=1,2,\cdots\}$.

证明 因为$(M,\mathscr{D})$是σ紧的，故存在$\{G_k|k=1,2,\cdots\}$，使G_k为开集，$\overline{G}_k$紧致，且$G_1\subset\overline{G}_1\subset G_2\subset\overline{G}_2\subset G_3\subset\cdots$. 对任意$k$及$p\in G_{k+2}-\overline{G}_{k-1}$，必有$p$的局部坐标系$(U_{p,k},\varphi_{p,k})$，使$U_{p,k}\subset G_{k+2}-\overline{G}_{k-1}$，$\overline{C^n(1)}\subset\varphi_{p,k}(U_{p,k})$. 选有限个$\left\{\varphi_{p_i,k}^{-1}\left(C^n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\middle| i=1,\cdots,n(k)\right\}$覆盖紧致集$\overline{G}_{k+1}-G_k$. 类似于定理1(1)证明可知$\{U_{p_i,k}|k=1,2,\cdots;i=1,\cdots,n(k)\}$和$\left\{\varphi_{p_i,k}^{-1}\left(C^n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\middle| k=1,2,\cdots;i=1,\cdots,n(k)\right\}$都是

M的局部有限的开覆盖. 为方便, 记前者为$\{(U_i, \varphi_i) | i=1,2,\cdots\}$, 并令$V_i=\varphi_i^{-1}\left(C^n\left(\frac{1}{2}\right)\right), i=1,2,\cdots$. 作函数$\psi_i: M\to \mathbf{R}$,

$$\psi_i(x)=\begin{cases} f\circ\varphi_i(x), & x\in U_i, \\ 0 & , x\in M-\overline{\varphi_i^{-1}(C^n(1))}, \end{cases}$$

其中 f 为引理 1 中的函数. 易见 ψ_i 是C^r的, 且

$$\psi_i(x)\begin{cases} >0, x\in V_i, \\ 0, \ x\in M-\overline{\varphi_i^{-1}(C^n(1))}. \end{cases}$$

由上述构造法可知, 对任意 $p\in M$, 存在 p 的开邻域 W_p, 使除有限个 U_i 外, 有 $\psi_i|_{W_p}\equiv 0$. 因此, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\psi_i(x)$ 为 C^r 函数. 此外, 因为 $\{V_i | i=1,2,\cdots\}$为M的一个开覆盖, 故对任意 $p\in M$, 至少存在一个含 p 的V_{i_0}, 于是 $\psi_{i_0}(p)>0$, 这就推出了$0<\sum\limits_{i=1}^{\infty}\psi_i(x)<+\infty$. 我们令

$$g_i(x)=\frac{\psi_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\psi_j(x)}\begin{cases} >0, & x\in V_i, \\ 0 & , \ x\in M-\overline{\varphi_i^{-1}(C^n(1))}, \end{cases}$$

则$\{g_i | i=1,2,\cdots\}$为从属于$\{U_i | i=1,2,\cdots\}$的一个单位分解. #

定理 3 (单位分解存在性定理)

(1) 设 $\{U_\alpha | \alpha\in\Gamma\}$ 为 n 维 $C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 仿紧流形$(M, \mathscr{D})$的一个局部有限的开覆盖, 且 $\bar{U}_\alpha$ 是紧致的, 则存在一个从属于$\{U_\alpha | \alpha\in\Gamma\}$的单位分解$\{g_\alpha | \alpha\in\Gamma\}$.

(2) n 维$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$仿紧流形$(M, \mathscr{D})$具有单位分解.

证明 (1) 对任意 $x\in M$, 存在 x 的一个局部坐标邻域U_x, 使得$\bar{U}_x\subset U_{\alpha_0}$(某个 $\alpha_0\in\Gamma$). 因为M仿紧, 所以M的开覆盖 $\{U_x | x\in M\}$ 有一个局部有限的开精致$\{W_\beta | \beta\in\Lambda\}$. 于是, 对任意$\alpha\in\Gamma$, 令

$V_\alpha^* = \bigcup\limits_{\overline{W}_\beta \subset U_\alpha} W_\beta$（如果不存在$\overline{W}_\beta \subset U_\alpha$，令$V_\alpha^* = \varnothing$）. 因为$\{W_\beta \mid \beta \in \Lambda\}$是局部有限的，故 $\overline{V_\alpha^*} = \bigcup\limits_{\overline{W}_\beta \subset U_\alpha} \overline{W}_\beta \subset U_\alpha \subset \overline{U}_\alpha$. 显然，$\{V_\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma\}$也是$M$的一个局部有限的开覆盖，且$\overline{V_\alpha^*}$是紧致的. 同理可得到$M$的局部有限的开覆盖$\{V_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$，使得$\overline{V}_\alpha$是紧致的，且

$$V_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset V_\alpha^* \subset \overline{V}_\alpha^* \subset U_\alpha \subset \overline{U}_\alpha.$$

由引理 2，对任意$\alpha \in \Gamma$，存在M上的C^r函数$\psi_\alpha \geqslant 0$，且在紧致集$\overline{V}_\alpha \Gamma$ $\psi_\alpha > 0$，在$M - V_\alpha^*$上$\psi_\alpha = 0$. 因为$\overline{V}_\alpha \subset \mathrm{Supp}\psi_\alpha \subset \overline{V_\alpha^*} \subset U_{\alpha\alpha} U$和$\{ \mid \alpha \in$ 上是局部有限的，故类似于定理 2 最后的证明可知$\sum\limits_{\alpha \in \Gamma} \psi_\alpha(x)$是$C^r$类的，且$0 < \sum\limits_{\alpha \in \Gamma} \psi_\alpha(x) < +\infty$. 令

$$g_\alpha(x) = \frac{\psi_\alpha(x)}{\sum\limits_{\delta \in \Gamma} \psi_\delta(x)},$$

则$\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$为从属于$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$的一个单位分解.

（2）对任意$x \in M$，由定理 1（2），存在x的一个坐标邻域U_x使得$\overline{U}_x$是紧致的. 因为M仿紧，所以M的开覆盖$\{U_x \mid x \in M\}$必有一个局部有限的开精致$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$. 显然，$\overline{U}_\alpha \subset \overline{U}_x$（某个$x$），因而$\overline{U}_\alpha$是紧致的. 再由(1)，存在一个从属于$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$的单位分解$\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$. #

定理 4 设$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$为$n$维$C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$仿紧流形$(M, \mathscr{D})$的一个开覆盖，则存在一个从属于它的广义单位分解$\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$：$g_\alpha \in C^r(M, \mathbf{R})$，$\mathrm{Supp} g_\alpha \subset U_\alpha$，$\{\mathrm{Supp} g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$是局部有限的，$g_\alpha(x) \geqslant 0$，$\sum\limits_{\alpha \in \Gamma} g_\alpha(x) = 1$，$x \in M$，$\alpha \in \Gamma$.

注意： $\overline{U}_\alpha$和$\mathrm{Supp} g_\alpha$未必紧致.

证明 若$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$为$M$的开覆盖，则对任意$x\in M$，存在$\alpha\in\Gamma$，使$x\in U_\alpha$. 取$x$的开邻域$V_x$，使$\overline{V}_x$紧致且$\overline{V}_x\subset U_\alpha$，则$\{V_x|x\in M\}$为$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$的一个开精致. 因为$(M,\mathscr{D})$仿紧，所以存在$\{V_x|x\in M\}$的(因而也是$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$的)局部有限的开精致$\{W_\beta|\beta\in\Lambda\}$，且显然$\overline{W}_\beta$紧致. 取$\theta:\Lambda\to\Gamma$，使对任何$\beta\in\Lambda$，唯一对应一个$\theta(\beta)\in\Gamma$且$\overline{W}_\beta\subset U_{\theta(\beta)}$. 由定理3，存在一个从属于$\{W_\beta|\beta\in\Lambda\}$的单位分解$\{\varphi_\beta|\beta\in\Lambda\}$. 对任意$\alpha\in\Gamma$，令$g_\alpha(x)=\sum\limits_{\theta(\beta)=\alpha}\varphi_\beta(x)$(如果$\alpha\overline{\in}\theta(\Lambda)$，令$g_\alpha(x)=0$)，$x\in M$. 由于$\{\mathrm{Supp}\varphi_\beta|\beta\in\Lambda\}$局部有限，故$g_\alpha\in C^r(M,\boldsymbol{R})$，$\mathrm{Supp}g_\alpha=\bigcup\limits_{\theta(\beta)=\alpha}\mathrm{Supp}\varphi_\beta\subset U_\alpha$以及$\{\mathrm{Supp}g_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$也是局部有限的，此外，显然$g_\alpha(x)\geqslant 0$，$\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}g_\alpha(x)=1$，$x\in M$，$\alpha\in\Gamma$. 这就证明了$\{g_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$为从属于$\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$的广义单位分解. #

如果定理4中的仿紧改为σ紧，读者不用定理3的结论而直接用定理2和4的方法完成此定理的证明.

推论1 设$(M,\mathscr{D})$为n维$C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$仿紧流形，$A\subset U\subset M$，$A$为闭集，$U$为开集.

(1) 证明：存在C^r函数$\varphi:M\to\boldsymbol{R}$，使得满足：$(a)0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，$x\in M$；$(b)\varphi(x)=1$，$x\in A$；$(c)\mathrm{Supp}\varphi\subset U$.

(2) 如果$F:U\to\boldsymbol{R}^m$为C^r映射，则存在C^r映射$G:M\to\boldsymbol{R}^m$，使得$G|_A=F|_A$.

证明 (1) 由于$A\subset U\subset M$，A为闭集，U为开集，故$\{U,M-A\}$为M的开覆盖. 因M仿紧，根据定理4，存在从属于开覆盖$\{U,M-A\}$的广义单位分解$\{\varphi,\psi\}\subset C^r(M,\boldsymbol{R})$，使$\mathrm{Supp}\varphi\subset U$，$\mathrm{Supp}\psi\subset M-A$，$\varphi+\psi=1$，$\varphi,\psi\geqslant 0$. 于是$\psi|_A=0$，因而$\varphi|_A=1$，且显然$0\leqslant\varphi\leqslant 1$. 这就证明了$\varphi$为所求函数.

(2) 设 φ 为(1)中所述函数，令

$$G(x)=\begin{cases}\varphi(x)F(x), & x\in U,\\ 0, & x\overline{\in}\mathrm{Supp}\varphi.\end{cases}$$

由于 $\varphi\in C^r(M,\mathbf{R})$，$0\leqslant\varphi\leqslant1$，$\varphi|_A=1$，故 $G\in C^r(M,\mathbf{R})$ 且 $G|_A=F|_A$. #

推论 2 设 A_0 和 A_1 为 n 维 $C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 仿紧流形 $(M,\mathscr{D})$ 的不相交的闭集. 则存在一个 C^r 函数 $\varphi:M\to\mathbf{R}$，使得 $0\leqslant\varphi\leqslant1$，$\varphi|_{A_0}=0,\varphi|_{A_1}=1$.

证明 由于 A_0 和 A_1 为 M 上的不相交的闭集，故 $\{M-A_0,M-A_1\}$ 为 M 的开覆盖，根据定理4，存在从属于它的广义单位分解 $\{\varphi,\psi\}$，使 $\varphi,\psi\in C^r(M,\mathbf{R}),\varphi,\psi\geqslant0$，$\varphi+\psi=1$，$\mathrm{Supp}\varphi\subset M-A_0$，$\mathrm{Supp}\psi\subset M-A_1$. 于是，$0\leqslant\varphi\leqslant1,\varphi|_{A_0}=0,\psi|_{A_1}=0$，从而 $\varphi|_{A_1}=1$. 这就证明了 φ 为所求函数. #

利用单位分解我们还可证明 C^r 函数的延拓定理. 为此，先给出下面定义:

定义 3 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 $C^r(r\geqslant1)$ 流形，$A\subset M$，$f:A\to\mathbf{R}$ 为函数. 如果对任意 $p\in A$，存在一个 p 的开邻域 U_p 和一个 C^r 函数 $f_p:U_p\to\mathbf{R}$，使得 $f|_{A\cap U_p}=f_p|_{A\cap U_p}$，则称 f **在 A 上是 C^r 的**.

定理 5 设 A 为 n 维 $C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 仿紧流形 $(M,\mathscr{D})$ 的闭集，则 A 上的任一 C^r 函数 f 可以延拓为 M 上的一个 C^r 函数 $\tilde{f}$.

证明 由于 f 在 A 上为 C^r 函数，故对任何 $p\in A$，存在 p 的开邻域 U_p 及 C^r 函数 $f_p:U_p\to\mathbf{R}$，使 $f_p|_{A\cap U_p}=f|_{A\cap U_p}$. 因为 A 为闭集，故 $\{U_p|p\in A\}\cup\{M-A\}$ 为 M 的开覆盖. 再由 M 仿紧，故有从属于它的广义单位分解 $\{\varphi_p|p\in A\}\cup\{\varphi_A\}\subset C^r(M,\mathbf{R})$，其中 $\{\mathrm{Supp}\varphi_p|p\in A\}\cup\{\mathrm{Supp}\varphi_A\}$ 局部有限，$\varphi_p\geqslant0$，$\varphi_A\geqslant0$，$\sum\limits_{p\in A}\varphi_p+\varphi_A=1$，且 $\mathrm{Supp}\varphi_p\subset U_p$，$\mathrm{Supp}\varphi_A\subset M-A$，令 $\tilde{f}_p:M\to\mathbf{R}$，

$$\tilde{f}_p(x)=\begin{cases}\varphi_p(x)f_p(x), & x\in U_p,\\ 0 & , x\notin \mathrm{Supp}\varphi_p.\end{cases}$$

显然，$\mathrm{Supp}\tilde{f}_p\subset\mathrm{Supp}\varphi_p$，从而$\{\mathrm{Supp}\tilde{f}_p\mid p\in A\}$ 局部有限，并且 $\tilde{f}=\sum\limits_{p\in A}\tilde{f}_p\in C^r(M,\boldsymbol{R})$，$\tilde{f}$为 f 的延拓．　　#

$\boldsymbol{R}^N$中大量的光滑曲线、n 维光滑曲面是微分流形的实例，它们是 $\boldsymbol{R}^N$ 中的正则子流形．人们自然要问：一个 n 维$C^r(r\geqslant1)$流形$(M,\mathscr{D})$在什么条件下能被安装在 Euclid 空间中？即存在一个 C^r 嵌入$F:M\to\boldsymbol{R}^N$，此时$F:M\to f(M)$为同胚．作为$\boldsymbol{R}^N$的子拓扑空间，$F(M)$（因而M）为A_2空间．此外，我们当然希望 $\boldsymbol{R}^N$（使流形M实现的 Euclid 空间）的维数N越小越好．我们关心的问题是 N 能小到什么程度，此时需要加什么条件？对于紧致 n 维$C^r(r\geqslant1)$流形在 Euclid 空间中的实现有以下的定理．

定理 6　（紧致流形的嵌入定理）设 $(M,\mathscr{D})$ 为紧致 n 维 $C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$流形，则存在 $m\in N$以及一个C^r 嵌入$F:M\longrightarrow\boldsymbol{R}^m\times\underbrace{\boldsymbol{R}^n\times\cdots\times\boldsymbol{R}^n}_{m\text{个}}=\boldsymbol{R}^{m(n+1)}$.

证明　对于任何 $p\in M$，选取 p 的局部坐标系(U_p,φ_p)使得 $\varphi_p(p)=0$，$\overline{C^n(1)}\subset\varphi_p(U_p)$．令$V_p=\varphi_p^{-1}\left(C^n\left(\frac{1}{2}\right)\right)$．显然，$\{V_p\mid p\in M\}$为$M$的开覆盖，由$M$紧致，可选出有限子覆盖$\{V_{p_1},\cdots,V_{p_m}\}$.

应用引理 1 中的函数 f，设

$$f_i(x)=\begin{cases}f(\varphi_{p_i}(x)), & x\in U_{p_i},\\ 0 & , x\in M-\overline{\varphi_{p_i}^{-1}(C^n(1))}.\end{cases}$$

显然 $f_i:M\to\boldsymbol{R}$是C^r 的．我们定义

$$F:M\to\boldsymbol{R}^m\times\underbrace{\boldsymbol{R}^n\times\cdots\times\boldsymbol{R}^n}_{m\text{个}}=\boldsymbol{R}^{m(n+1)}$$

为

$$F(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x);f_1(x)\varphi_{p_1}(x),\cdots,f_m(x)\varphi_{p_m}(x)).$$

由 f_i 的性质，$f_i(x)\varphi_{p_i}(x)$ 可视作 M 上的 C^r 映射，只须在 U_{p_i} 外边定义为 0. 显然，$F\in C^r(M,\mathbf{R}^{m(n+1)})$. 下面可以证明 F 就是所要求的 C^r 嵌入

首先证明 F 是单射. 如果 $F(p)=F(q)$，则对任何 i 有 $f_i(p)=f_i(q)$，$i=1,\cdots,m$. 若 $p\in\varphi_{p_{i_0}}^{-1}(C^n(1))$，则从 $f_{i_0}(p)\cdot\varphi_{p_{i_0}}(p)=f_{i_0}(q)\cdot\varphi_{p_{i_0}}(q)$ 和 $f_{i_0}(q)=f_{i_0}(p)>0$ 推出 $q\in\varphi_{p_{i_0}}^{-1}(C^n(1))$ 和 $\varphi_{p_{i_0}}(p)=\varphi_{p_{i_0}}(q)$. 因为 $\varphi_{p_{i_0}}$ 是同胚，故 $p=q$，从而 F 为单射.

又因 M 紧致，所以一一连续映射 $F:M\to F(M)\subset\mathbf{R}^{m(n+1)}$ 为同胚（若 A 为紧致流形 M 的闭集，则 A 紧致，于是 $(F^{-1})^{-1}(A)=F(A)\subset F(M)$ 为紧致集，由此得到 $F(A)$ 为闭集和 F^{-1} 连续）.

最后证明 $\mathrm{rank}F=n$. 对于任何 $p\in M$，由于 $\{V_{p_1},\cdots,V_{p_m}\}$ 为 M 的开覆盖，则存在 $k\in\{1,\cdots,m\}$，使 $p\in V_{p_k}$. 我们利用局部坐标系 (U_{p_k},φ_{p_k}) 可以证明 Jacobi 矩阵

$$D(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^{m(n+1)}}\circ F\circ\varphi_{p_k}^{-1})=D(F\circ\varphi_{p_k}^{-1})$$

包含非异的 $n\times n$ 矩阵，因而 $(\mathrm{rank}F)_p=n$. 事实上，设 $\varphi_{p_k}(x)=(u^1,\cdots,u^n)=u$，$\varphi_{p_k}(p)=(u_0^1,\cdots,u_0^n)=u_0$. 因为 $f(u)$ 在 u_0 的一个邻域中恒为 1，所以 $f(u_0)=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial u^i}(u_0)=0$. 于是，$f_k(x)\cdot\varphi_{p_k}(x)=f(\varphi_{p_k}(x))\cdot\varphi_{p_k}(x)=f(u)\cdot u$，

$$\left.\frac{\partial(f(u)u^1,\cdots,f(u)u^n)}{\partial(u^1,\cdots,u^n)}\right|_{u_0}$$

$$=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u^1}u^1+f(u)\cdot 1 & \dfrac{\partial f}{\partial u^2}u^1+f(u)\cdot 0 & \cdots\dfrac{\partial f}{\partial u^n}u^1+f(u)\cdot 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial u^1}u^n+f(u)\cdot 0 & \dfrac{\partial f}{\partial u^2}u^n+f(u)\cdot 0 & \cdots\dfrac{\partial f}{\partial u^n}u^n+f(u)\cdot 1\end{pmatrix}_{u_0}$$

$=\det I_n=1$. #

关于紧致 n 维 $C^r(1\leqslant r\leqslant\infty)$ 流形的嵌入定理证明比较简单，但流形实现的 Euclid 空间$\boldsymbol{R}^N$的维数 $N=m(n+1)$可能很高．下面我们不加证明地介绍 Whitney 嵌入定理(参阅[Bröcher, Th. and Jänich, K., p71]和[Sternberg, S., p63])．

定理 7 (**Whitney 嵌入定理**) 如果 $(M,\mathscr{D})$为n维 C^r 流形$(1\leqslant r\leqslant\infty)$且又是$A_2$空间，则存在$C^r$ 嵌入$F: M\to\boldsymbol{R}^{2n+1}$，且$F(M)$为 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 中的闭子集．

在§1和本节已分别引进了微分流形和仿紧的概念．同时已经知道，一个C^r流形$(0\leqslant r\leqslant\omega)$自然是一个$C^k$流形$(0\leqslant k\leqslant r)$．反之，从 Whitney 的一些结果即得(参阅[Whitney, H.][1] 和 [Whitney, H.][2])：任何一个仿紧的 C^k 流形$(k\geqslant1)$都具有一个与其上已给的C^k 构造 C^k 相容的 C^r 构造$(k\leqslant r\leqslant\omega)$，并且在相差到一个 C^k 微分同胚意义下是唯一的．但是，一个C^0 流形(拓扑流形)上不一定具有C^1 构造(参阅[Kervaire, M.])．此外，在同一个C^0 流形(拓扑流形)上可以有不微分同胚的微分构造．Milnor 于 1956 年发表一篇文章给出了一个与 7 维标准球面同胚，但不微分同胚的微分流形(Milnor 怪球，参阅[Milnor, J. W.][1])时引起了人们巨大的惊讶．更进一步，Kervaire 和 Milnor 于 1962 年证明了 S^7 上共有 28 种不微分同胚的微分构造(参阅 [Kervaire, M. and Milnor, J. W.])．

第二章　向量丛和切丛

本章§3中为建立 C^∞ 映射 $f: M_1 \to M_2$ 在 $p \in M_1$ 处的微分或Jacobi映射 f_{*p}，必须在一点处线性化，即引进切向量和切空间的概念．切向量的引进可采用近代观点或不变观点或映射观点；也可采用古典观点或坐标观点．将 M 上的切空间族按一定方式使其成为切丛．在引入切丛之前，§2先介绍了近代数学中应用广泛并且极其重要的向量丛或更一般的纤维丛的概念．向量丛或纤维丛中，两个相交的平凡丛图卡之间由给定的拓扑群或 C^r 群或 $C^r(r \geqslant 1)$ Lie群相粘贴在一起．而§1阐述的就是这种既有拓扑或流形构造又有与拓扑或流形相容的抽象群构造的拓扑群，或 C^r 群或 $C^r(r \geqslant 1)$ Lie群．§4给出了 C^∞ 切向量场和积分曲线之间的关系，并应用1参数群的引理1证明了连通 C^∞ 流形上的齐性定理，从而它成为一个齐性空间．

§1　Lie　群

Lie群具有两种构造，一种是流形，另一种是与流形相容的群的构造．它的确切定义如下．

定义1　设集合 G 满足：(1) G 为拓扑空间；(2) G 为群；(3)群运算是 C^0 类的，即乘法：$G \times G \to G$，$(a, b) \mapsto a \cdot b$ 和逆运算 $J: G \to G$，$a \mapsto a^{-1}$ 是 C^0 类的，则称 G 为**拓扑群**．

如果集合 G 满足：(1) G 为 n 维 C^r 流形，$r \in \{0, 1, \cdots, \infty, \omega\}$；(2) G 为群；(3)群运算是 C^r 类的(群与流形 C^r 相容)，则称 G 为 **n 维 C^r 群**．如果 $r \geqslant 1$，称 G 为 **n 维 C^rLie群**；如果 $r = \omega$，称 G 为 **n 维 C^ωLie群或实解析Lie群**．类似可定义 **n 维复解析Lie**

群.

由 $J\circ J(a)=J(a^{-1})=(a^{-1})^{-1}=a$ 可知，$J:G\to G$ 为 C^r 同胚.

从定义 1 还可以看出，C^r 群 G 为拓扑群．但拓扑群可以不是 C^r 群．例如，有理数加群 Q 是拓扑群，但它不是流形，从而不是 C^r 群．含单位元素(即 0 元素)的连通分支为 $\{0\}$．注意子群 $\{0\}$ 不是 Q 的开集.

C^0 群但非 $C^r(r\geqslant1)$ Lie 群的例子叙述如下：设 R^1 为 1 维 Euclid 空间的通常 C^r 流形 $(r\geqslant1)$，$x,\ y\in R^1$，定义 x 和 y 的加法为 $z=x+y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$，显然 R^1 在此加法下为 C^0 群．因为 $z=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 的一阶偏导数在 $(0,0)$ 不连续，故它不为 $C^r(r\geqslant1)$ Lie 群.

定理 1 (1) 定义 1 中条件(3) $\Leftrightarrow G\times G\to G,\ (x,y)\mapsto x\cdot y^{-1}$ 是 C^r 类的.

(2) 定义 1 中，当 $r\in\{1,\cdots,\infty,\omega\}$ 时，条件(3) $\Leftrightarrow G\times G\to G$，$(x,y)\mapsto x\cdot y$ 是 C^r 类的.

证明 (1) ($\Rightarrow$) 因为 $(x,y)\mapsto(x,y^{-1})$ 和 $(x,y^{-1})\mapsto x\cdot y^{-1}$ 是 C^r 的，故 $(x,y)\mapsto x\cdot y^{-1}$ 是 C^r 类的.

($\Leftarrow$) 因为 $y\mapsto(e,y)$ 和 $(e,y)\mapsto e\cdot y^{-1}=y^{-1}$ 是 C^r 类的，故 $y\mapsto y^{-1}$ 是 C^r 类的（e 为 G 的单位元素）．此外，从 $(x,\ y)\mapsto(x,\ y^{-1})$ 和 $(x,y^{-1})\mapsto x\cdot(y^{-1})^{-1}=x\cdot y$ 是 C^r 类的，可推出 $(x,y)\mapsto x\cdot y$ 也是 C^r 类的.

(2) ($\Rightarrow$) 显然．($\Leftarrow$) 只须证明 $G\to G,\ x\mapsto x^{-1}$ 是 C^r 类的．为此，取 e 的一个局部坐标系，并将 $x,y\in G$ 的坐标记为 x^i 和 y^i，则在此局部坐标系内，$(x\cdot y)^i=\varphi^i(x,y)$，其中 φ^i 是 C^r 类的，且 $\varphi^i(e,y)=y^i$．因此，$\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}\right)_{x=y=e}=\delta^i_j$．由隐函数定理，方程组 $(x\cdot y)^i$

$=\varphi^i(x,y)=e^i$ 在 e 附近有唯一的 C^r 的解 $y^i=\theta^i(x)$. 但当 $x\cdot y=e$ 时, $y=x^{-1}$, 故 $x\mapsto x^{-1}$ 在 e 是 C^r 类的. 由于 $x\mapsto a^{-1}\cdot x\mapsto(a^{-1}\cdot x)^{-1}\to(a^{-1}\cdot x)^{-1}\cdot a^{-1}=x^{-1}$, 映射 $x\mapsto x^{-1}$ 在 a 应是 C^r 类的. #

定义 2 设 H 为 C^rLie 群 G 的子群 $(r\geqslant 1)$, 给 H 一个 C^r 流形的构造. 关于这个 C^r 构造, 如果 H 为 C^r 流形 G 的 C^r 子流形, 并且它本身也是一个 C^r 群时, 则称 H 为 G 的 **C^rLie 子群**.

定理 2 设 H 为 C^rLie 群 G 的 C^r 正则子流形 $(r\geqslant 1)$, 而且作为抽象群是 G 的子群, 则 H 为 G 的 C^rLie 子群.

证明 因为 $H\times H\to G\times G$, $(h_1,h_2)\mapsto(h_1,h_2)$ 和 $G\times G\to G$, $(h_1,h_2)\mapsto h_1\cdot h_2$ 都是 C^r 映射, 所以 $H\times H\to G$, $(h_1,h_2)\mapsto h_1\cdot h_2$ 是 C^r 映射. 又因为 H 为 G 的 C^r 正则子流形, 由第一章 § 2 定理 3 可知 $H\times H\to H$, $(h_1,h_2)\mapsto h_1\cdot h_2$ 也为 C^r 映射. 同理可证 $H\to H$, $h\mapsto h^{-1}$ 为 C^r 映射. 这就证明了 H 为 G 的 C^r Lie 子群. #

例 1 $\boldsymbol{R}^n$ 为 C^ω 流形. 群运算取作加法, 即对 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $y=(y^1,\cdots,y^n)$, 定义 $x+y=(x^1+y^1,\cdots,x^n+y^n)$, 单位元素(即零元素) 为 $0=(0,\cdots,0)$, x 的逆元素(即 x 的负元素) 为 $-x=(-x^1,\cdots,-x^n)$. 显然, 群运算是 C^ω 类的. 于是, $\boldsymbol{R}^n$ 就成为 C^ω Lie 群, 称为 **n 维向量群**.

例 2 $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}=\{(e^{2\pi u^1 i},\cdots,e^{2\pi u^n i})\mid u^j\in\boldsymbol{R}, j=1,\cdots,n\}$ 为 C^ω 流形. 群的乘法运算为

$$
\begin{aligned}
&(e^{2\pi u^1 i},\cdots,e^{2\pi u^n i})\cdot(e^{2\pi v^1 i},\cdots,e^{2\pi v^n i})\\
&=(e^{2\pi(u^1+v^1)i},\cdots,e^{2\pi(u^n+v^n)i}).
\end{aligned}
$$

单位元素为 $(e^{2\pi 0i},\cdots,e^{2\pi 0i})$, $(e^{2\pi u^1 i},\cdots,e^{2\pi u^n i})$ 的逆元素为 $(e^{-2\pi u^1 i},\cdots,e^{-2\pi u^n i})$. 显然群运算是 C^ω 类的. 于是, T^n 就成为 C^ω Lie 群, 称为 **n 维圆环群**. 特别地, $T^1=S^1$ 为 1 维 C^ωLie 群.

由第一章 § 2 例 9 和定理 3, 当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 整系数无关时, 设

$H=\{(e^{2\pi\alpha_1 ti},\ \cdots,\ e^{2\pi\alpha_n ti})\,|\,t\in\boldsymbol{R}\}$，易证 $\overline{H}=T^n\neq H$，故 H 为 T^n 的非闭 C^ωLie 子群和非正则子流形，它是定理 2 的逆不成立的反例.

例 3 $S^3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_l\in\boldsymbol{R},\ l=1,\cdots,4;\ \sum_{l=1}^{4}x_l^2=1\}$

$=\{x_1+x_2\boldsymbol{i}+x_3\boldsymbol{j}+x_4\boldsymbol{k}\,|\,x_l\in\boldsymbol{R},\ l=1,\cdots,4;\sum_{l=1}^{4}x_l^2=1,\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1,\boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{jk}=-\boldsymbol{kj}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{ki}=-\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{j}\}$ 为 C^ω 流形. 群的乘法运算为四元数广域的乘法. 设 $x=x_1+x_2\boldsymbol{i}+x_3\boldsymbol{j}+x_4\boldsymbol{k}$, $y=y_1+y_2\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+y_4\boldsymbol{k}$, $\|x\|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, 易证

$$x\cdot y=(x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4)+(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)\boldsymbol{i}+(x_1y_3+x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4)\boldsymbol{j}+(x_1y_4+x_2y_3+x_4y_1-x_3y_2)\boldsymbol{k},$$

$$\|x\cdot y\|=\|x\|\cdot\|y\|.$$

$$x^{-1}=\frac{1}{\|x\|^2}(x_1-x_2\boldsymbol{i}-x_3\boldsymbol{j}-x_4\boldsymbol{k}),x\neq 0.$$

由此可知，如果 $x,y\in S^3$，则 $x\cdot y\in S^3$，$x^{-1}\in S^3$ 且 $x^{-1}=x_1-x_2\boldsymbol{i}-x_3\boldsymbol{j}-x_4\boldsymbol{k}$. 为验证 S^3 上群运算的 C^ω性，不失一般性可设$x_4>0,y_4<0$，则 $x_4=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$和 $y_4=-\sqrt{1-y_1^2-y_2^2-y_3^2}$. 于是，$(x\cdot y)_l$ 为 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 的 C^ω 函数，$(x^{-1})_l$ 为x_1,x_2,x_3 的 C^ω 函数，因而群运算是 C^ω 类的. 这就证明了 S^3 为 3 维 C^ωLie 群.

例 4 设 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})=\{A\,|\,A$ 为 $n\times n$ 实矩阵$,\det A\neq 0\}$. 如果 $A=(a_{ij})$ 看作 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 中的点 $(a_{11},\ \cdots,\ a_{1n},\ a_{21},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{n1},\cdots,a_{nn})$，因为 $A\mapsto\det A$ 为 C^ω映射，故 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})=\det^{-1}(\boldsymbol{R}-\{0\})$为 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 中的 C^ω开子流形. 根据矩阵的乘法，$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$构成一个群. 显然，单位元素是单位矩阵$I_n=(\delta_j^i)$，$\delta_j^i=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ A 的逆元素为

逆矩阵 A^{-1}. 容易证明群运算是 C^ω 类的. 事实上, 设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$, 令 $A\cdot B=(c_{ij})$, $A^{-1}=(d_{ij})$. 则由 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, 故它为 a_{ik} 和 b_{kj} 的多项式函数, 从而乘法运算 $(A, B)\mapsto A\cdot B$ 为 C^ω 映射. 因为 $d_{ij}=A_{ij}/\det A$ 为 a_{kl} 的有理函数(A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式), 所以逆运算 $A\mapsto A^{-1}$ 也为 C^ω 映射. 由此可知, $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 成为一个 n^2 维的 C^ωLie 群, 称它为 **n 次实一般线性群**. 类似地, 可以证明 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{C})=\{A\mid A$ 为 $n\times n$ 复矩阵, $\det A\neq 0\}$ 为 n^2 维复 C^ωLie 群, 称它为 **n 次复一般线性群**.

例 5 设 G_i 为 C^r 群, $r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$, $i=1,\cdots,n$. 一方面把 $G_1\times\cdots\times G_n$ 作为 C^r 积流形. 另一方面, 把 $G_1\times\cdots\times G_n$ 作为群的直积, 这时 $(g_1,\cdots,g_n)\cdot(h_1,\cdots,h_n)=(g_1\cdot h_1,\cdots,g_n\cdot h_n)$. 容易验证 $G_1\times\cdots\times G_n$ 也是 C^r 群, 称为 C^r 群 $G_1,\cdots,G_n$ 的**直积**. 如 n 维圆环群 $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}$ 为 n 个 1 维 C^ωLie 群 S^1 的直积.

定义 3 设 G 为 C^r 群, M 为 C^r 流形, $r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$. 如果 C^r 映射 $F: G\times M\to M$, $(g,p)\mapsto F(g,p)=gp$ 满足条件: (1) $ep=p$, $p\in M$, e 为 G 的单位元素; (2) $g_1(g_2p)=(g_1\cdot g_2)p$, $p\in M$, $g_1, g_2\in G$. 则称 **G 左方 C^r 作用于 M**.

设 $g\in G$ 为一固定元素, 则 $F_g: M\to M$, $p\mapsto F_g(p)=gp$ 为 C^r 同胚. 事实上, 由 F 为 C^r 映射, 故 F_g 也为 C^r 映射. 又因 $F_{g^{-1}}\circ F_g(p)=F_{g^{-1}}(gp)=g^{-1}(gp)=(g^{-1}\cdot g)p=ep=p$, $F_{g^{-1}}\circ F_g=\mathrm{Id}_M$, 同理 $F_g\circ F_{g^{-1}}=\mathrm{Id}_M$. 于是, $F_g^{-1}=F_{g^{-1}}$ 也为 C^r 映射. 有时, 我们也称从 M 到 M 的 C^r 同胚为 **C^r 变换**. 因此, G 左方 C^r 作用于 M 时, 称 G 为 M 的**左方 C^r 变换群**. 类似地, 可以定义**右方 C^r 变换群**.

如果对任意 $p\in M$, $F(g,p)=gp=p$ 必有 $g=e$, 则称 C^r 群 G 在 C^r 流形 M 上的作用是**有效的**.

定义 4 设 C^r 群 G 左方 C^r 作用于 C^r 流形 M，对于固定的 $p\in M$，显然，$G_p=\{g\in G\mid gp=p\}$ 为 G 的闭集，而且为 G 的子群，称它为 C^r 群 G 在点 p 的**迷向子群**（或**均等群**，或**固定群**）.

定义 5 设 C^r 群 G C^r 作用在 C^r 流形 M 上，对固定的 $p\in M$，称 M 中的子集 $M_p=\{gp\mid g\in G\}$ 为通过 p 点的**轨道**. 如果只有一个轨道，换言之，如果对任意 $p,q\in M$，存在 $g\in G$，使得 $gp=q$，则称 C^r 群 G 在 C^r 流形 M 上的作用是 **C^r 可递的**（或**可迁的**）.

如果 C^r 群 G C^r 作用在 C^r 流形 M 上是 C^r 可递的，则称 M 为 G 的 **C^r 齐性流形**，简称 C^r 流形 M 为 **C^r 齐性空间**.

通常我们指的齐性空间是 C^∞（或 C^ω）齐性空间. 这时，G 为 C^∞（或 C^ω）Lie 群，M 为 C^∞（或 C^ω）流形，作用是 C^∞（或 C^ω）类的.

例 6 设 $F:\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$，$y=F(A,x)=Ax$，即

$$\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}.$$

显然，C^ωLie 群 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 左方 C^ω 作用于 C^ω 流形 $\boldsymbol{R}^n$ 上. $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 就是 $\boldsymbol{R}^n$ 的线性变换群.

设 $\{e_i\mid i=1,\cdots,n\}$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的标准规范正交基，$(e_1,\cdots,e_n)=I_n$（单位矩阵）. 如果对任意 $x\in\boldsymbol{R}^n$，有 $Ax=x$，则 $A=AI_n=(Ae_1,\cdots,Ae_n)=(e_1,\cdots e_n)=I_n$，故 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 左方 C^ω 有效作用于 $\boldsymbol{R}^n$. 但显然，不存在 $A\in\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$，使 $A0=e_1$，故 $\boldsymbol{R}^n$ 在 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 下不是可递的，因而它在 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 下不是齐性空间.

更一般地，我们考虑 $\boldsymbol{R}^n$ **上的仿射变换群** $\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\boldsymbol{R})=\{(A,a)\mid A\in\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R}),\ a\in\boldsymbol{R}^n\}$，关于乘法 $(A,a)\cdot(B,b)=(AB,Ab+a)$，易证它成为 n^2+n 维 C^ωLie 群.

设 $\widetilde{F}:\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$，$y=\widetilde{F}((A,a),x)=(A,a)x=Ax$

$+a$. 显然，C^ωLie 群$\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\mathbf{R})$左方 C^ω 作用在 C^ω 流形 $\mathbf{R}^n$ 上.

如果对任意 $x\in\mathbf{R}^n$ 有 $Ax+a=x$，则 $a=A0+a=0$，于是类似于$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$可证 $A=I_n$，故$(A,a)=(I_n,0)$，它是群$\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\mathbf{R})$的单位元素，这就证明了$\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\mathbf{R})C^\omega$有效作用于$\mathbf{R}^n$. 此外，对任意 x，$y\in\mathbf{R}^n$，$(I_n,y-x)x=I_nx+(y-x)=y$，故 $\mathbf{R}^n$ 在$\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\mathbf{R})$下是可递的，从而它在$\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\mathbf{R})$下是齐性空间.

例 7 设 G 为 C^r 群，$M=G$，$F:G\times G\to G$，$F(g,\ p)=g\cdot p$（$\cdot$表示群的乘法）. 易证C^r 群G 左方 C^r 有效作用于C^r流形 G 上. 对于任意 $p,q\in M=G$，因为$(q\cdot p^{-1})\cdot p=q$，$q\cdot p^{-1}\in G$，故 $M=G$ 在G下是可递的，从而它在 G 下是 C^r 齐性空间.

定理 3 设 C^rLie 群 GC^r 作用于 C^r 流形M 上（$r\geqslant 1$），则点 p 的迷向子群 G_p 为 G 的 C^r 正则子流形，并且它是 G 的闭 C^rLie 子群.

证明 对于固定的 $g\in G$，我们定义 $L_g:G\to G$，$L_g(a)=g\cdot a$，$\eta_g:M\to M$，$\eta_g(q)=gq$ 和 $\theta:G\to M$，$\theta(a)=ap$(固定 p). 于是，$\theta\circ L_g(a)=\theta(g\cdot a)=(g\cdot a)p=g(a\,p)=\eta_g\circ\theta(a)$，$\theta\circ L_g=\eta_g\circ\theta$. 由于 L_g 和 η_g 分别为 G 和 M 的 C^r 变换，因此它们的 Jacobi 行列式在任何点上都不为 0. 这就推出了 $(\mathrm{rank}\theta)_{g\cdot a}=(\mathrm{rank}\theta)_a$，即 $\mathrm{rank}\theta$ 在G 上为定值. 根据第一章 § 2 定理 4 可知，$G_p=\{g\in G|gp=p\}=\{g\in G|\theta(g)=p\}=\theta^{-1}(\{p\})$为$G$ 的 C^r 正则子流形. 再由定理 2，G_p 为G 的 C^r Lie 子群.

如果 $g_n\in G_p$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_n=g\in G$，则 $gp=F(g,p)=\lim\limits_{n\to+\infty}F(g_n,p)=\lim\limits_{n\to+\infty}g_np=\lim\limits_{n\to+\infty}p=p$，故 $g\in G_p$，从而 G_p 为闭集. #

关于单位连通分支（含单位元素 e 的连通分支）有下面的定理.

定理 4 如果G为拓扑群，则单位连通分支K为G的闭正规子群. 对于任意$a\in G$, Ka为含a的连通分支.

如果G为C^r流形，$r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$，则$K$为$G$的开$C^r$群. 对于任意$a\in G$, Ka为含a的既开又闭的连通分支.

证明 如果$a\in K$，因为$G\to G, b\mapsto b\cdot a^{-1}$为同胚，故$Ka^{-1}$为连通集. 又因为$e=a\cdot a^{-1}\in Ka^{-1}$，所以$Ka^{-1}\subset K$. 于是，对任何$a,b\in K$, $a^{-1}=e\cdot a^{-1}\in K$, $b\cdot a=b\cdot(a^{-1})^{-1}\in K$. 这就证明了$K$为$G$的子群.

对任意$b\in G$，类似可知bKb^{-1}是连通的. 因为$e=beb^{-1}\in bKb^{-1}$，我们有$bKb^{-1}\subset K$，故K是正规的. 又因K为连通分支，所以它为闭集.

如果G为C^r流形，则G是局部连通的，且存在e的连通的开邻域$U\subset K$. 对任何$a\in K$，因$G\to G$, $b\mapsto b\cdot a$为同胚，所以Ua为含$ea=a$的连通开邻域，从而$Ua\subset K$. 这就证明了K为G的开子流形和子群. 以及K为G的开C^r子群. #

例 8 设$\mathrm{SY}(n,\boldsymbol{R})$为$n\times n$对称矩阵的全体，用自然的方法可以将它视作$\boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. 显然$f:\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})\to\mathrm{SY}(n,\boldsymbol{R}), f(A)=AA'$为$C^\omega$映射，其中$A'$为$A$的转置矩阵.

对任意$A\in\mathrm{GL}(n,\ \boldsymbol{R})$，定义$R_A:\mathrm{GL}(n,\ \boldsymbol{R})\to\mathrm{GL}(n,\ \boldsymbol{R})$, $R_A(B)=BA$，易见R_A为C^ω微分同胚，且对所有$A\in O(n)=\{A\in\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})\,|\,AA'=I_n\}=f^{-1}(I_n)$, $f\circ R_A=f$. 于是对任何$A\in O(n)$, $(\mathrm{rank}\ f)_A=(\mathrm{rank}\ f)_{R_A(I_n)}=(\mathrm{rank}\ f)_{I_n}$(定值)，下面可证此值为$\frac{n(n+1)}{2}$，根据第一章§2定理4，$O(n)=f^{-1}(I_n)$为$\boldsymbol{R}^{n^2}$的$n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$维$C^\omega$正则子流形.

设$A=(a_{ij})$，则$f^{ij}(A)=(AA')_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$和

$$\frac{\partial f^{ij}}{\partial x^{kl}}(A)=\begin{cases}a_{jl}, & k=i\neq j,\\ a_{il}, & k=j\neq i,\\ 2a_{il}, & k=i=j,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 $A=I_n$ 时，$\frac{\partial f^{ij}}{\partial x^{ij}}=\frac{\partial f^{ij}}{\partial x^{ji}}=1, \frac{\partial f^{ii}}{\partial x^{ii}}=2$，其它全为 0. 相应的 Jacobi 矩阵表示为

$$\begin{array}{c} \\ f^{11}\\ \vdots\\ f^{nn}\\ f^{12}\\ \vdots\\ f^{1n}\\ \vdots\\ f^{n-1,n}\end{array}\begin{pmatrix} x^{11}\cdots x^{nn} & x^{12}\ x^{21}\cdots x^{1n}\ x^{n1}\cdots x^{n-1,n}\ x^{n,n-1} \\ 2 & \\ \ddots & \\ \quad 2 & \\ & 1\quad 1 \\ & \ddots \\ & \quad 1\quad 1 \\ & \quad\ddots \\ & \qquad 1\quad 1 \end{pmatrix}$$

显然由上述矩阵可看出 $(\mathrm{rank}\, f)_{I_n}=\frac{n(n+1)}{2}$.

我们也可利用定理3证明上述结论. 为此，设 $G=M=\mathrm{GL}(n,R)$，$F:\mathrm{GL}(n,R)\times\mathrm{GL}(n,R)\to\mathrm{GL}(n,R)$，$F(A,B)=ABA'$，易证 $G=\mathrm{GL}(n,R)$ 左方 C^ω 作用在 $M=\mathrm{GL}(n,R)$上. 在定理3中，令 $p=I_n$，$\theta:\mathrm{GL}(n,R)\to\mathrm{GL}(n,R)$，$\theta(A)=F(A,I_n)=AI_nA'=AA'$，于是 I_n 的迷向子群 $\mathrm{GL}(n, R)_{I_n}=\{A\in GL(n,R)\,|\,I_n=F(A,I_n)=AA'\}=O(n)$ 为 $\mathrm{GL}(n,R)$的 $n^2-\mathrm{rank}\theta=n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$维 C^ω 正则子流形. 称 $O(n)$ 为 **n 阶正交群或直交群**，它是 $\mathrm{GL}(n,R)$的 C^ωLie 子群.

设 $A(m)\in O(n)$，$\lim\limits_{m\to+\infty}A(m)=A(0)$，则 $A(0)A(0)'=\lim\limits_{m\to+\infty}A(m)\cdot$

$A(m)'=\lim\limits_{m\to+\infty} I_n=I_n$, $A(0)\in O(n)$，从而 $O(n)$ 为闭集．又因 $\|A\|=\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)}=\sqrt{n}$，$A\in O(n)$，故 $O(n)$ 为 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 中的有界集．这就证明了 $O(n)$ 为紧致集．

我们知道，由线性代数知识可知，对任意 $A\in O(n)^+=\{B\in O(n)\mid \det B=1\}$，必存在 $P\in O(n)$ 使得

$$A=P\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&\cos\theta_1&\sin\theta_1&&&\\&&&-\sin\theta_1&\cos\theta_1&&&\\&&&&&\ddots&&\\&&&&&&\cos\theta_k&\sin\theta_k\\&&&&&&-\sin\theta_k&\cos\theta_k\end{pmatrix}P^{-1}.$$

令 $\varphi:[0,1]\to O(n)$，

$$\varphi(t)=P\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&\cos t\theta_1&\sin t\theta_1&&&\\&&&-\sin t\theta_1&\cos t\theta_1&&&\\&&&&&\ddots&&\\&&&&&&\cos t\theta_k&\sin t\theta_k\\&&&&&&-\sin t\theta_k&\cos t\theta_k\end{pmatrix}P^{-1},$$

则 φ 为 $O(n)^+$ 中连结 $\varphi(0)=I_n$ 和 $\varphi(1)=A$ 的一条道路，于是 $O(n)^+$ 是道路连通的．对任何 $A\in O(n)^-$，则 $JA\in O(n)^+$，其中 $J=\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\in O(n)^-$．令 φ 为 $O(n)^+$ 中连结 I_n 和 JA 的一条道

路，明显地，$J\varphi$为 $O(n)^-$中连结 J 和 $JJA=A$ 的一条道路，所以 $O(n)^-$也是道路连通的. 假设存在道路 $\varphi:[0,1]\to O(n)$，使$\varphi(0)\in O(n)^+$，$\varphi(1)\in O(n)^-$，则$\det\varphi(0)=1$，$\det\varphi(1)=-1$，根据连续函数的 0 值定理，存在 $\xi\in(0,1)$使 $\det\varphi(\xi)=0$，这与 $\det\varphi(\xi)=\pm 1$ 相矛盾. 所以连结 $O(n)^+$的点和 $O(n)^-$ 的点的道路是不存在的. 这就证明了 $O(n)$ 恰有两个道路连通分支. 根据第一章 §1 定理 3，对于流形，道路连通分支和连通分支是相同的，故 $O(n)$也恰有两个连通分支 $O(n)^+$和 $O(n)^-$，其中$O(n)^+$为单位连通分支.

考虑 $A\in GL(n,\boldsymbol{R})$，记$A=(A_1,\cdots,A_n)$，其中 $A_1,\cdots,A_n$ 为线性无关的向量，由 Gram-Schmidt 正交化过程得到

$$\begin{cases}B_1=A_1\\B_2=\lambda_{21}A_1+A_2\\\cdots\cdots\\B_n=\lambda_{n1}A_1+\cdots+\lambda_{n,\,n-1}A_{n-1}+A_n\end{cases}$$

为 n 个正交向量. 令

$$B_k(t)=\frac{t(\lambda_{k1}A_1+\cdots+\lambda_{k,\,k-1}A_{k-1})+A_k}{(1-t)+t\|\lambda_{k1}A_1+\cdots+\lambda_{k,\,k-1}A_{k-1}+A_k\|},$$

则 $B(0)=(B_1(0),\cdots,B_n(0))=(A_1,\cdots,A_n)=A$，$B(1)=(B_1(1),\cdots,B_n(1))=\left(\frac{B_1}{\|B_1\|},\cdots,\frac{B_n}{\|B_n\|}\right)\in O(n)$. 如果 $A\in GL(n,R)^+=\{B\in GL(n,R)\mid\det B>0\}$，根据 0 值定理，$B(1)\in O(n)^+$. 由此得到 $GL(n,\boldsymbol{R})^+$为道路连通集，同理可知 $GL(n,\boldsymbol{R})^-$也为道路连通集. 而由 0 值定理知 $GL(n,\boldsymbol{R})$不连通，所以 $GL(n,\boldsymbol{R})$恰有两个道路连通分支，也恰有两个连通分支.

注 1 我们也可用下面的方法证明 $GL^+(n,\boldsymbol{R})$是连通的. 对于任何 $A\in GL^+(n,\boldsymbol{R})$，设 $a_1+ib_1,\cdots,a_j+ib_j,\lambda_{j+1}>0,\cdots,\lambda_n>0$ 为它的所有的特征值. 由线性代数知识，存在 $P\in O(n)$，使得

$$A=P\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & \\ -b_1 & a_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & a_j & b_j & & & \\ & & & -b_j & a_j & & & \\ & & & & & \lambda_{j+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

则有 $GL^+(n,\boldsymbol{R})$中的道路将 A 与

$$B=P\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & & & & \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\theta_j & \sin\theta_j & & & \\ & & & -\sin\theta_j & \cos\theta_j & & & \\ & & & & & \lambda_{j+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

相连．而经

$$P\begin{pmatrix} \cos\theta_1 t & \sin\theta_1 t & & & & & & \\ -\sin\theta_1 t & \cos\theta_1 t & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\theta_j t & \sin\theta_j t & & & \\ & & & -\sin\theta_j t & \cos\theta_j t & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

B又与 $PI_nP^{-1}=I_n$ 在 $GL^+(n,\boldsymbol{R})$中相连．这就证明了$GL^+(n,\boldsymbol{R})$是道路连通的．

与$\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\boldsymbol{R})$相类似，我们定义$\widetilde{O}(n)=\{(A,a)\mid A\in O(n),\ a\in \boldsymbol{R}^n\}$. 易见$\widetilde{O}(n)$为$\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\boldsymbol{R})$的$\frac{n(n-1)}{2}+n$维$C^\omega$Lie子群，称$\widetilde{O}(n)$为**运动群**或$\boldsymbol{R}^n$的**同尺变换群**，可以证明它是$\boldsymbol{R}^n$中保持距离或保持内积的一一映射的全体.

设$F:O(n)\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$，$y=F(A,\ x)=Ax$. 完全类似$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$，$C^\omega$Lie群$O(n)$左方$C^\omega$有效作用于$C^\omega$流形$\boldsymbol{R}^n$，但$\boldsymbol{R}^n$在$O(n)$下不是可递的，因而它在$O(n)$下不是齐性空间. 再设$\widetilde{F}:\widetilde{O}(n)\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$，$y=\widetilde{F}((A,a),x)=(A,a)x=Ax+a$，类似于$\widetilde{\mathrm{GL}}(n,\boldsymbol{R})$，$C^\omega$Lie群$\widetilde{O}(n)$左方$C^\omega$有效作用在$C^\omega$流形$\boldsymbol{R}^n$上，且$\boldsymbol{R}^n$在$\widetilde{O}(n)$下是可递的，从而它在$\widetilde{O}(n)$下是齐性空间.

例 9 设$F:O(n)\times S^{n-1}\to S^{n-1}$，$F(A,x)=Ax$. 易证$\frac{n(n-1)}{2}$维$C^\omega$Lie群$O(n)$ C^ω有效作用在$n-1$维C^ω流形S^{n-1}上. 对于任何$x,\ y\in S^{n-1}$，如果$x\neq y$，作xOy平面内的规范正交基$e_1=x$，e_2，于是$y=\cos\theta\cdot e_1+\sin\theta\cdot e_2$. 将$\{e_1,e_2\}$扩充为$\{e_1,\cdots,e_n\}$，使它为$\boldsymbol{R}^n$中的规范正交基. 于是，当$n\geqslant 2$时，令

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix},$$

则$A\in O(n)$，且$Ax=y$. 这就证明了S^{n-1}在$O(n)$下是可递的，从而S^{n-1}在$O(n)$下是齐性空间. 当$n=1$时，$S^{n-1}=S^0=\{-1,1\}$，$O(n)=O(1)=\{-1,\ 1\}$. 如果取$A=-1$，$x=-1$，$y=1$，则$Ax=y$，故S^0在$O(1)$下也是齐性空间.

§2 纤维丛和向量丛

为了在 C^∞ 流形上引进切丛、张量丛和外形式丛，我们先介绍近代数学中极其重要的更一般的纤维丛和向量丛的概念.

定义 1 设 $r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$，$E$、$M$ 和 F 为 C^r 流形，G 为 C^r 群，它 C^r 有效作用在 F 上，$\pi:E\to M$ 为 C^r 满映射，且是局部平凡的，也就是存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 和相应的 C^r 同胚族 $\{\psi_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$，使得对每个 $\alpha\in\Gamma$，图表

$$\begin{array}{ccc} E\big|_{U_\alpha}:\ \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & U_\alpha\times F \\ & \searrow^{\pi} \quad \swarrow_{\pi_{1\alpha}} & \\ & U_\alpha & \end{array}$$

是可交换的，即 $\pi=\pi_{1\alpha}\circ\psi_\alpha$，其中 $\pi_{1\alpha}(x,a)=x$. 显然，$\psi_{\alpha x}=\psi_\alpha|_x$: $\pi^{-1}(\{x\})\to\{x\}\times F$ 为 C^r 同胚. 如果 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则 ψ_α 和 ψ_β 诱导出 C^r 同胚 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$，且图表

$$\begin{array}{ccc} (U_\alpha\cap U_\beta)\times F & \xrightarrow{\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}} & (U_\alpha\cap U_\beta)\times F \\ & \searrow^{\pi_{1\alpha}} \quad \swarrow_{\pi_{1\beta}} & \\ & U_\alpha\cap U_\beta & \end{array}$$

是可交换的，即 $\pi_{1\alpha}=\pi_{1\beta}\circ\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$. 令 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(x,a)=(x,g_{\beta\alpha}(x)a)$，这里 $g_{\beta\alpha}(x):F\to F$ 为 C^r 同胚和从 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$ 到 $(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)$ 的**转换映射** $g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ 为 C^r 映射. 则称五元组 $\xi=\{E,M,\pi,G,F\}$ 为 C^r **纤维丛**，E 为**丛(全)空间**，M 为**底空间**，π 为从 E 到 M 上的**投影**，G 为**构造群**(或**结构群**)，F 为**纤维**，$E_x=\pi^{-1}(\{x\})$ 为 x **上的纤维**. 有时简称 E 为纤维丛.

从上定义，立即可知 $g_{\alpha\alpha}(x)=e$ 和 $g_{\gamma\alpha}(x)=g_{\gamma\beta}(x)\cdot g_{\beta\alpha}(x)$. 事实

上，由$(x, a)=\mathrm{Id}_{U_\alpha\times F}(x, a)=\psi_\alpha\circ\psi_\alpha^{-1}(x, a)=(x, g_{\alpha\alpha}(x)a)$得到$g_{\alpha\alpha}\cdot(x)a=a, a\in F$，再由$GC^r$有效作用于$F$，故$g_{\alpha\alpha}(x)=e$. 由$(x, g_{\gamma\alpha}\cdot(x)a)=\psi_\gamma\circ\psi_\alpha^{-1}(x,a)=\psi_\gamma\circ\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(x,a)=\psi_\gamma\circ\psi_\beta^{-1}(x, g_{\beta\alpha}(x)a)=(x, g_{\gamma\beta}(x)\cdot g_{\beta\alpha}(x)a)$得到$g_{\gamma\alpha}(x)a=g_{\gamma\beta}(x)\cdot g_{\beta\alpha}(x)a$，$a=g_{\alpha\alpha}(x)a=g_{\alpha\gamma}(x)\cdot g_{\gamma\alpha}(x)a=g_{\alpha\gamma}(x)\cdot g_{\gamma\beta}(x)\cdot g_{\beta\alpha}(x)a, \forall a\in F$，根据$GC^r$有效作用于$F$，有$g_{\alpha\gamma}(x)\cdot g_{\gamma\alpha}(x)=e$和$g_{\alpha\gamma}(x)\cdot g_{\gamma\beta}(x)\cdot g_{\beta\alpha}(x)=e$. 于是，$g_{\gamma\beta}(x)\cdot g_{\beta\alpha}(x)=g_{\gamma\alpha}(x)\cdot g_{\alpha\gamma}(x)\cdot g_{\gamma\beta}(x)\cdot g_{\beta\alpha}(x)=g_{\gamma\alpha}(x)$.

定义 1 中，$(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$称为**局部平凡系**，$\pi^{-1}(U_\alpha)$称为**局部平凡邻域**，$\psi_\alpha$称为**局部平凡映射**. 如果$U_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$，或$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$而$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$和$\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}$为$C^r$映射，则称$(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$和$(\pi^{-1}(U_\beta), \psi_\beta)$是$C^r$相容的. 令$\mathscr{E}'=\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$，类似于$C^r$流形的定义，它唯一确定了一个$\xi$或$E$的最大局部平凡系族$\mathscr{E}=\{(\pi^{-1}(U), \psi)\mid(\pi^{-1}(U), \psi)与\mathscr{E}'C^r相容\}$. 严格来说，我们指的纤维丛$\xi$或$E$就是具有最大局部平凡系族$\mathscr{E}$的，而$\mathscr{E}'$只是生成$\mathscr{E}$的一个基. 如果$\mathscr{E}_1'$和$\mathscr{E}_2'$都是基，则$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2\Longleftrightarrow\mathscr{E}_1'$和$\mathscr{E}_2'$是$C^r$相容的. 因此用六元组$\xi=\{E, M, \pi, G, F, \mathscr{E}\}$定义纤维丛应该更确切一些. $\mathscr{E}$中的元素$(\pi^{-1}(U), \psi)$称为**丛图卡**(丛图片，局部平凡系)，称$\mathscr{E}$为**丛图册**.

如果M为n维C^r流形，F为m维C^r流形，则E为$n+m$维C^r流形.

定义 1 中，如果将C^r流形，C^r群，C^r有效作用，C^r满映射，C^r同胚，C^r映射分别改为拓扑空间，拓扑群，连续有效作用，连续满映射，同胚，连续映射，则称ξ或E为**拓扑纤维丛**.

定义 2 在定义 1 中，设纤维$F=\boldsymbol{R}^m$，构造群$G=\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})$(或$\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})$的正则$C^r$Lie 子群$H$). 根据§1例 6，$\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})$左方$C^\omega$(或$HC^r$)有效作用在$\boldsymbol{R}^m$上. 如果$\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\boldsymbol{R}^m$为$C^r$同胚，$g_{\beta\alpha}: U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})$为$C^r$映射，而$\psi_\alpha|_x: \pi^{-1}(\{x\})$

$\to\{x\}\times\boldsymbol{R}^m$ 和 $g_{\beta\alpha}(x)$: $\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$ 都为线性同构. 则称 C^r 纤维丛 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^m,\mathscr{E}\}$ 为**秩 m 的 C^r 实向量丛或实 m 面丛**. 显然, x 点处的纤维 $E_x=\pi^{-1}(\{x\})$ 为 m 维实向量空间. 当 $m=1$ 时,称 ξ 为**实线丛**. 实向量丛简称向量丛, 它是沿 M 的 m 维向量空间族,局部可视作平凡积, 它们是通过构造群 $\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})$(或 $\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})$的正则 C^rLie 子群 H)粘起来的(图 9).

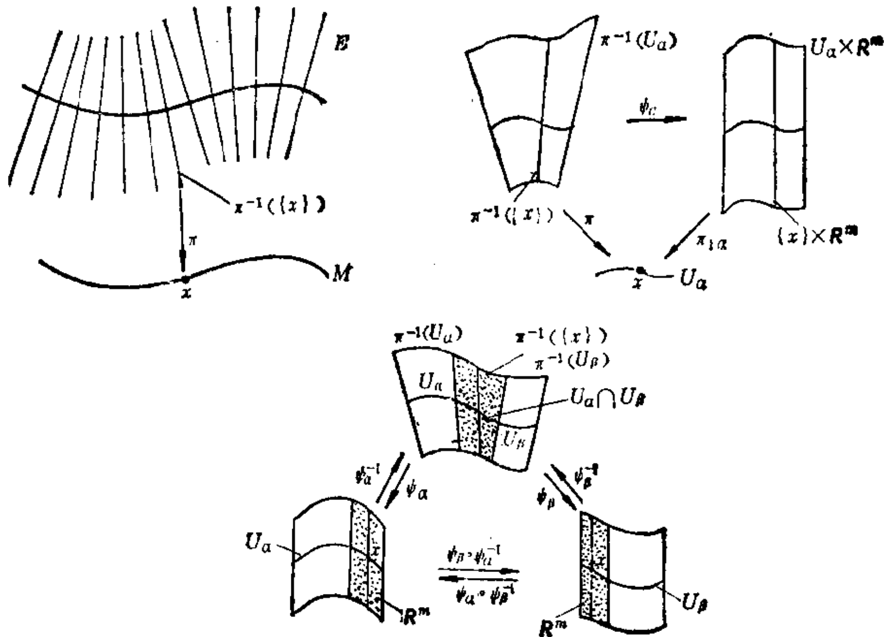


图 9

例 1 设 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{E}\}$ 为 C^r 纤维丛, 如果存在丛图卡 $(E,\psi)\in\mathscr{E}$, 则称 ξ 为**平凡丛**. 此时 $\psi: E=\pi^{-1}(M)\to M\times F$ 为 C^r 同胚, $\psi|_x: E_x=\pi^{-1}(\{x\})\to\{x\}\times F$ 也为 C^r 同胚.

设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^m,\mathscr{E}\}$ 为 C^r 向量丛, 如果存在从图卡 $(E,\psi)\in\mathscr{E}$, 使 $\psi: E=\pi^{-1}(M)\to M\times\boldsymbol{R}^m$ 为 C^r 同胚, $\psi|_x$: $E_x=\pi^{-1}(\{x\})\to\{x\}\times\boldsymbol{R}^m$ 为线性同构,则称 ξ 为**平凡向量丛**.

例 2 Möbius 带 E (将长方形带扭转 180° 并粘合其两边得到的商拓扑空间,图 10),底空间为 S^1, 投影 $\pi: E\to S^1$ 如图 10 所示,纤维为[−1, 1]. 取 $U_1=S^1-\{p_1\}$, $U_2=S^1-\{p_2\}$, 则$\{U_1,U_2\}$为

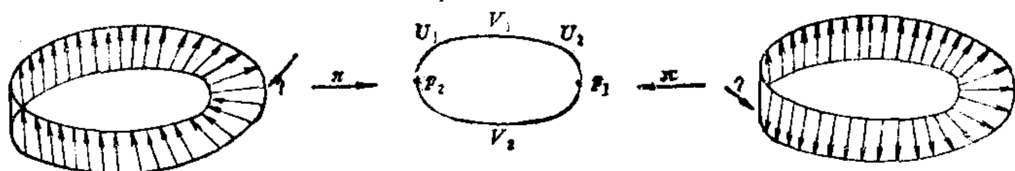


图 10

S^1的开覆盖. 用自然的方法定义同胚 $\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times [-1,1]$, $i=1,2$. $U_1 \cap U_2$ 由两个 S^1 的不相交的开集 V_1 和 V_2 组成, 而同胚

$$(U_1 \cap U_2) \times [-1,1] \xrightarrow{\psi_2 \circ \psi_1^{-1}} (U_1 \cap U_2) \times [-1,1]$$

使得(图 10)

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(x,a) = \begin{cases} (x,a), x \in V_1, \\ (x,-a), x \in V_2, \end{cases}$$

$$g_{21}(x) = \begin{cases} 1, x \in V_1, \\ -1, x \in V_2, \end{cases} \quad g_{21}(x) \in Z_2.$$

构造群$Z_2 = \{+1, -1\}$赋以离散拓扑, 而$(+1)a = a$, $(-1)a = -a$, 显然 Z_2 有效作用在$[-1,1]$上. 于是, $\xi = \{E, S^1, \pi, Z_2, [-1,1], \mathscr{E}\}$ 为纤维丛. 利用反证法可以证明 ξ 不是平凡丛. 假设 ξ 为平凡丛, 则存在丛图卡(E, ψ), 使 $\psi: E = \pi^{-1}(S^1) \to S^1 \times [-1,1]$为同胚. 设$E$的边界为 l, 它是连通集, 利用平面 R^2 上的 Brouwer 的区域不变性定理可知, $\psi(l) = S^1 \times \{-1\} \cup S^1 \times \{1\}$, 但左边为连通集, 右边为非连通集, 矛盾.

如果将上述例子中的纤维改为$(-1,1)$, 则相应的开 Möbius 带E仍是非平凡丛. 否则存在丛图卡(E, ψ), 使 $\psi: E = \pi^{-1}(S^1) \to S^1 \times (-1,1)$为同胚, 因而存在同胚 $\varphi: E \to T = \{(x^1, x^2) \in R^2 \mid 1 < (x^1)^2 + (x^2)^2 < 4\}$, 设$E$的中心线为 l, 则 $\varphi(l) \subset T$ 为一条 Jordan 曲线(S^1 的拓扑象). 根据平面 R^2 上的 Jordan 定理, 此 Jordan 曲线恰好将 $R^2 - \varphi(l)$分成两个连通的开集, 一个是有界的, 称

为 $\varphi(l)$的"内部"；另一个是无界的，称为$\varphi(l)$的"外部"，于是$\varphi(E-l)=T-\varphi(l)$ 不是连通的. 但由 $E-l$ 连通，从而它的拓扑象$\varphi(E-l)$连通，矛盾(图 11).

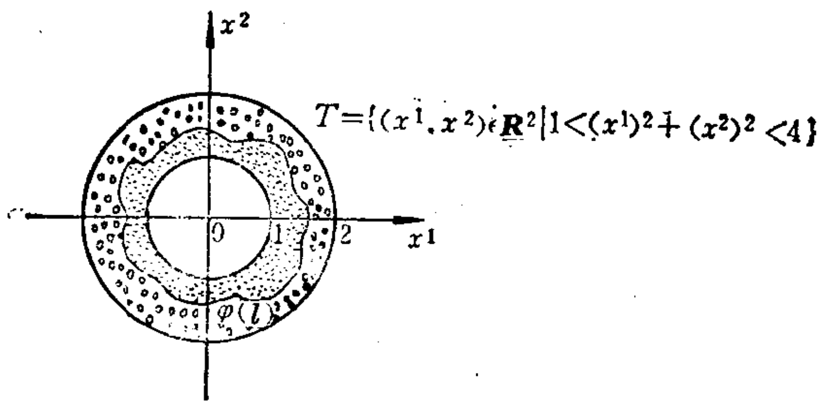


图 11

我们将$[0,1]\times\mathbf{R}^1$ 的两边$\{0\}\times\mathbf{R}^1$ 和$\{1\}\times\mathbf{R}^1$ 中的$(0, a)$和$(1,-a)$相粘合得到的商空间E仍称为 Möbius 带. 此时，S^1视作$[0,1]$中粘合$\{0\}$和$\{1\}$所得到的商空间. 令 $\eta:[0,1]\to\eta([0, 1])\cong S^1$ 为从$[0,1]$到商空间的自然投影，$\eta(x)=[x]$，$\eta(0)=\eta(1)=[0]=[1]$($[x]$ 表示 x 的等价类). $\pi: E\to\eta([0,1])\cong S^1$, $\pi([(x,a)])=[x]$为丛投影. 令 $U_1=\eta((0,1))$，$U_2=\eta\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$，

$$\psi_1: \pi^{-1}(U_1)\to U_1\times\mathbf{R}^1, \psi_1([(x,a)])=([x],a),$$

$$\psi_2: \pi^{-1}(U_2)\to U_2\times\mathbf{R}^1,$$

$$\psi_2([(x,a)])=\begin{cases}([x],a), & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ ([x],-a), & x\in\left(\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

于是，当$[x]\in U_1\cap U_2=\eta\left(\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)\cup\eta\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)=V_1\cup V_2$ 时，有

$$\psi_2\circ\psi_1^{-1}([x],a)=\begin{cases}([x],a), & [x]\in\eta\left(\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)=V_1,\\ ([x],-a), & [x]\in\eta\left(\left(\frac{1}{2},1\right)\right)=V_2,\end{cases}$$

$$g_{21}([x])=\begin{cases}1, & [x]\in V_1,\\ -1, & [x]\in V_2,\end{cases}\quad g_{21}([x])\in\mathrm{GL}(1,\boldsymbol{R}).$$

易证 $\xi=\{E,S^1,\pi,\mathrm{GL}(1,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^1,\mathscr{E}\}$ 为秩 1 的 C^ω 实线丛．同上述纤维为$(-1,\ 1)$的证明，它也不是平凡向量丛．此情况简证如下：假设 ξ 为平凡向量丛，则存在同胚 $\psi: E\to S^1\times\boldsymbol{R}^1$，$\psi|_x: E_x=\pi^{-1}(\{x\})\to\{x\}\times\boldsymbol{R}^1$ 为线性同构，故 $\psi(l)=S^1\times\{0\}$，其中 l 为 E 的中心线．因为 $E-l$ 连通，所以它的拓扑象 $\psi(E-l)=S^1\times(\boldsymbol{R}^1-\{0\})$也连通，这与 $S^1\times\{\boldsymbol{R}^1-\{0\}\}$不连通相矛盾(图 12)．

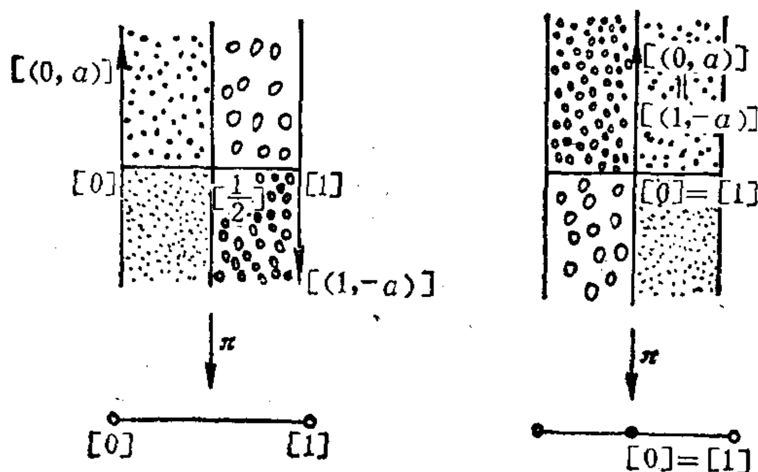


图 12

例 3 $\xi=\{S^n,p^n(\boldsymbol{R}),\pi,\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_2,\mathscr{E}\}$为 C^ω 纤维丛，其中 $\pi: S^n\to P^n(\boldsymbol{R})$，$\pi(x)=[x]$(参阅第一章 § 1例 4)，而局部平凡化叙述如下：令 $U_i=\{[x]\in P^n(\boldsymbol{R})\mid x^i\neq 0\}$，

$\psi_i: \pi^{-1}(U_i)\to U_i\times\boldsymbol{Z}_2$，$\boldsymbol{Z}_2=\{1,-1\}$为乘法群，

$$\psi_i(x)=\begin{cases}([x],1), & x\in U_i^+,\\ ([x],-1), & x\in U_i^-,\end{cases}$$

于是，$\psi_i^{-1}([x],\lambda)=\lambda\cdot\mathrm{Sgn}x_i\cdot x$，$\lambda\in\mathbf{Z}_2$，从而$\psi_j\circ\psi_i^{-1}([x],\lambda)=\psi_j(\lambda\cdot\mathrm{Sgn}x_i\cdot x)=([x],\lambda\cdot\mathrm{Sgn}x_i\cdot\mathrm{Sgn}x_j)$，$g_{ji}([x])=\mathrm{Sgn}x_i\cdot\mathrm{Sgn}x_j$，$g_{ji}:U_i\cap U_j\to\mathbf{Z}_2$ 视作 C^∞ 类的.

例 4 $\xi=\{S^{2n+1},P^n(\mathbf{C}),\pi,S^1,S^1,\mathscr{E}\}$为 C^∞ 纤维丛. 其中

$$S^{2n+1}=\{z=(z^1,\cdots,z^{n+1})\in\mathbf{C}^{n+1}\mid\sum_{j=1}^{n+1}z^j\cdot\overline{z^j}=1\}$$

(参阅第一章§1例5). 局部平凡化叙述如下: 设

$\pi:S^{2n+1}\longrightarrow P^n(\mathbf{C})$, $\pi(z^1,\cdots,z^{n+1})=[(z^1,\cdots,z^{n+1})]$，$U_j=\{(z^1,\cdots,z^{n+1})\in S^{2n+1}\mid z^j\neq 0\}$, $V_j=\pi(U_j)$. 令

$$\varphi_j:V_j=\pi(U_j)\longrightarrow\mathbf{C}^n,$$

$$\varphi_j([(z^1,\cdots,z^{n+1})])=\left(\frac{z^1}{z^j},\cdots,\widehat{\frac{z^j}{z^j}},\cdots,\frac{z^{n+1}}{z^j}\right)$$

$$=({}_j\xi^1,\cdots,\widehat{{}_j\xi^j},\cdots,{}_j\xi^{n+1}),$$

$$\psi_j^{-1}:V_j\times S^1\to\pi^{-1}(V_j)=U_j,$$

$$\psi_j^{-1}\left(\left[\left(\frac{z^1}{z^j},\cdots,\frac{z^{n+1}}{z^j}\right)\right],\lambda\right)=\psi_j^{-1}\left(\left[\left(\frac{z^1}{z^j},\cdots,\frac{z^j}{z^j},\cdots,\frac{z^{n+1}}{z^j}\right)\right],\lambda\right)$$

$$=\psi_j^{-1}([({}_j\xi^1,\cdots,{}_j\xi^{j-1},1,{}_j\xi^{j+1},\cdots,{}_j\xi^{n+1})],\lambda)$$

$$=\lambda\left(\frac{{}_j\xi^1}{\sqrt{1+\sum\limits_{k\neq j}|{}_j\xi^k|^2}},\cdots,\frac{{}_j\xi^{j-1}}{\sqrt{1+\sum\limits_{k\neq j}|{}_j\xi^k|^2}},\frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{k\neq j}|{}_j\xi^k|^2}},\right.$$

$$\left.\frac{{}_j\xi^{j+1}}{\sqrt{1+\sum\limits_{k\neq j}|{}_j\xi^k|^2}},\cdots,\frac{{}_j\xi^{n+1}}{\sqrt{1+\sum\limits_{k\neq j}|{}_j\xi^k|^2}}\right).$$

显然，ψ_j^{-1} 为 C^∞ 同胚，且把纤维映成纤维，故为局部平凡化. 对 $l\neq j$，不妨设 $j<l$，有

$$\psi_l\circ\psi_j^{-1}([({}_j\xi^1,\cdots,{}_j\xi^{j-1},1,{}_j\xi^{j+1},\cdots,{}_j\xi^{n+1})],\lambda)$$

$$=\psi_l\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\sum\limits_{k\neq j}|{}_j\xi^k|^2}}({}_j\xi^1,\cdots,{}_j\xi^{j-1},1,{}_j\xi^{j+1},\cdots,{}_j\xi^{n+1})\right)$$

$$=\psi_l\left(\frac{\lambda\cdot{}_j\xi^l}{|{}_j\xi^l|}\cdot\frac{|{}_j\xi^l|}{\sqrt{1+\sum\limits_{k\neq j}|{}_j\xi^k|^2}}\left(\frac{{}_j\xi^1}{{}_j\xi^l},\cdots,\frac{{}_j\xi^{j-1}}{{}_j\xi^l},\ \frac{1}{{}_j\xi^l},\ \frac{{}_j\xi^{j+1}}{{}_j\xi^l},\cdots,\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{{}_j\xi^{l-1}}{{}_j\xi^l},1,\ \frac{\xi^{l+1}}{{}_j\xi^l},\cdots,\frac{\xi^{n+1}}{{}_j\xi^l}\right)\right)$$

$$=\left(\left[\left(\frac{{}_j\xi^1}{{}_j\xi^l},\cdots,\frac{{}_j\xi^{j-1}}{{}_j\xi^l},\ \frac{1}{{}_j\xi^l},\ \frac{{}_j\xi^{j+1}}{{}_j\xi^l},\cdots,\frac{{}_j\xi^{l-1}}{{}_j\xi^l},1,\ \frac{{}_j\xi^{l+1}}{{}_j\xi^l},\cdots,\frac{\xi^{n+1}}{{}_j\xi^l}\right)\right],\right.$$

$$\left.\frac{{}_j\xi^l}{|{}_j\xi^l|}\lambda\right),$$

故 $g_{lj}([({}_j\xi^1,\cdots,{}_j\xi^{j-1},1,{}_j\xi^{j+1},\cdots,\ {}_j\xi^{n+1})])=\frac{{}_j\xi^l}{|{}_j\xi^l|}\in S^1$ （S^1 左方 C^ω 作用在 S^1 上，作用为乘法）. 显然，$g_{lj}: V_j\cap V_l\to S^1$ 为C^∞ 类的（注意，由$|{}_j\xi^l|$的出现，它不是 C^ω 类的！）.

定义 3 设 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{E}\}$ 为 C^r（或拓扑）纤维丛. 如果对 $0\leqslant k\leqslant r$ 存在 C^k（或连续）映射 $\sigma: M\to E$，使$\sigma(x)\in E_x$，$x\in M$，即 $\pi\circ\sigma=\mathrm{Id}_M$，则称 σ 为 ξ 的一个 **C^k（或连续）截面**. 记 C^k 截面的全体为 $C^k(\xi)$ 或 $C^k(E)$.

容易证明 $\sigma: M\to\sigma(M)$ 为 C^k 同胚（或同胚）.

如果 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^m,\ \mathscr{E}\}$ 为秩m的 C^r 向量丛，则它有一个特殊的 **0 截面** $\sigma_0: M\to E$，$\sigma_0(x)=0_x\in E_x$. 于是，$\sigma_0: M\to\sigma_0(M)=\{0_x|x\in M,\ 0_x$ 为 E_x 中的零向量$\}$ 为 C^r 同胚. 由此我们将M和 0 截面的象视作相同(图13). 运用数学分析中的 0 值定理和反证法，容易证明例 2 中的 1 维向量丛 Möbius 带E上无处

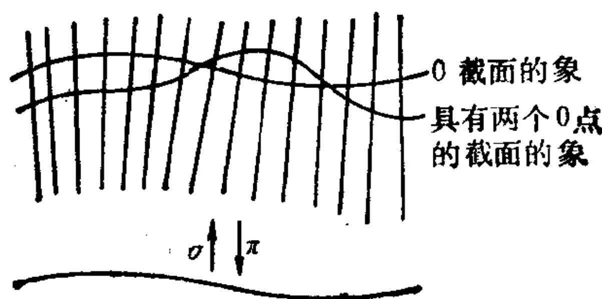


图 13

处非 0 的 C^0 截面.

设$C^k(\xi)=C^k(E)=\{\sigma|\sigma: M\to E$为$C^k$截面$\}$，对$\sigma,\eta\in C^k(E)$，$\lambda\in \boldsymbol{R}$，我们定义加法和数乘如下：

$$(\sigma+\eta)(x)=\sigma(x)+\eta(x),$$

$$(\lambda\sigma)(x)=\lambda\cdot\sigma(x), x\in M.$$

容易验证 $C^k(E)$在上述加法和数乘下形成一个 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间. 如果 $m\geqslant 1$，设(U,φ)，$\{x^i\}$为M的局部坐标系，使 $C^n(1)\subset\varphi(U)$，$(\pi^{-1}(U),\psi)$为E的从图卡，f 为第一章 § 3 引理 1 中所述. 令$u=x^1$，可选 $u_1,\cdots,u_{l+1}$ 使

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \cdots & u_1^l \\ \cdots & & & & \\ 1 & u_{l+1} & u_{l+1}^2 & \cdots & u_{l+1}^l \end{vmatrix}=\prod_{i<j}(u_j-u_i)\neq 0,$$

因此$\{(x^1)^l f\circ\varphi(p)\psi_p^{-1}(e_1)\,|\,l=0,1,2,\cdots\}$(自然可视作$E$上整体$C^k$截面)是线性无关的，故上述向量空间是无限维的.

除上述加法外，对 $\lambda\in C^k(M, \boldsymbol{R})$，$\sigma$，$\eta\in C^k(E)$，我们定义：$(\lambda\sigma)(x)=\lambda(x)\cdot\sigma(x), x\in M$，于是 $C^k(E)$成为 $\boldsymbol{R}$ 值函数的代数上的一个模(图 14).

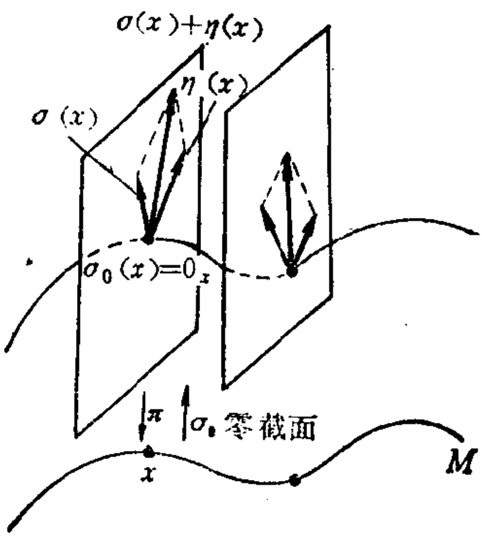


图 14

下面引进两个向量丛之间的丛映射，丛映射覆盖，M-丛映射(丛同态)，M-丛映射覆盖，M-丛等价(丛同构)等概念.

定义 4 设$\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\ \mathbf{R}^m\}$，$\xi'=\{E',M',\pi',$ $\mathrm{GL}(m',\mathbf{R}),\mathbf{R}^{m'}\}$为$C^r$向量丛，$f:M\to M'$，$\tilde{f}:E\to E'$为$C^r$映射，且$\tilde{f}_x=\tilde{f}|_x:E_x\to E'_{f(x)}$为线性映射，则称$(\tilde{f},f):\xi\to\xi'$为 **$C^r$ 丛映射**. 此时，图表

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ \tilde{f}\ } & F' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M & \xrightarrow{\ f\ } & M' \end{array}$$

是可交换的，即$\pi'\circ\tilde{f}=f\circ\pi$. 如果$\tilde{f}_x:E_x\to E'_{f(x)}$为同构(因而$m=m'$)，则称$\tilde{f}$ **C^r丛映射覆盖** f. 如果$\tilde{f}$ C^r丛映射覆盖C^r同胚$f:M\to M'$，我们可以定义$\tilde{f}^{-1}:E'\to E$. 利用局部平凡性和$A\longmapsto A^{-1}$ $(A\in\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}))$的$C^\omega$性，我们容易看到$\tilde{f}^{-1}$是$C^r$类的. 于是$\tilde{f}^{-1}$ C^r丛映射覆盖f^{-1}.

设$(\tilde{f},f):\xi\to\xi'$为C^r丛映射，如果存在C^r丛映射$(\tilde{g},g):\xi'\to\xi$，使得$\tilde{g}\circ\tilde{f}=\mathrm{Id}_E$，$\tilde{f}\circ\tilde{g}=\mathrm{Id}_{E'}$，$g\circ f=\mathrm{Id}_M$，$f\circ g=\mathrm{Id}_{M'}$，则称$(\tilde{f},f)$: $\xi\to\xi'$为 **C^r丛等价**. 此时，$m=m'$且图表

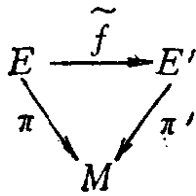
$$\begin{array}{ccc} E & \underset{\tilde{g}}{\overset{\tilde{f}}{\rightleftarrows}} & E' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M & \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & M' \end{array}$$

是可交换的，即$\pi'\circ\tilde{f}=f\circ\pi$，$\pi\circ\tilde{g}=g\circ\pi'$，$\tilde{f}^{-1}=\tilde{g}$，$f^{-1}=g$. 于是，$\tilde{f}:E\to E'$和$f:M\to M'$为$C^r$同胚，$\tilde{f}_x:E_x\to E'_{f(x)}$为线性同构.

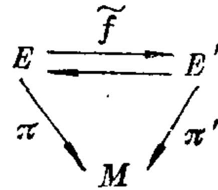
设$\mathscr{E}$和$\mathscr{E}'$分别为C^r向量丛ξ和ξ'的丛图册，$U_\beta\subset M$为开集，$\psi_\beta:\pi^{-1}(U_\beta)\to U_\beta\times\mathbf{R}^m$为$C^r$同胚，则当$(x,a)\in(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbf{R}^m$时(其中$(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{E}$)，$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(x,a)=(x,g_{\beta\alpha}(x)a)$关于

(x, a) 是 C^r 类的，因而 $g_{\beta\alpha}(x)=g_{\beta\alpha}(x)I_m=(g_{\beta\alpha}(x)e_1, \cdots, g_{\beta\alpha}(x)e_m)$关于$x$是$C^r$类的，即$g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to \mathrm{GL}(m, \mathbf{R})$是$C^r$类的，这就证明了$(\pi^{-1}(U_\beta), \psi_\beta)\in\mathscr{E}$，从而 $\mathscr{E}$包括所有可能的$(\pi^{-1}(U_\beta), \psi_\beta)$. 由此得到 $\mathscr{E}'=\{(\pi'^{-1}(f(U)), \psi\circ\tilde{f}^{-1})\mid(\pi^{-1}(U), \psi)\in\mathscr{E}\}$.

如果 $M=M'$，$f=\mathrm{Id}_M$，$\tilde{f}:E\to E'$ 为 C^r 映射，且 $\tilde{f}_x:E_x\to E'_x$ 为线性映射，则称$(\tilde{f}, \mathrm{Id}_M)$或$\tilde{f}$为**$M$-$C^r$从映射**或**$C^r$从同态**. 此时，交换图表为图(1)即 $\pi'\circ\tilde{f}=\pi$. 设$(\tilde{f}, \mathrm{Id}_M):\xi\to\xi'$ 为 M-C^r 从映射，如果存在 M-C^r 从映射$(\tilde{g}, \mathrm{Id}_M):\xi'\to\xi$使得$\tilde{g}\circ\tilde{f}=\mathrm{Id}_E$，$\tilde{f}\circ\tilde{g}=\mathrm{Id}_{E'}$，则称$\tilde{f}$或$(\tilde{f}, \mathrm{Id}_M)$为**$M$-$C^r$从等价**或**$C^r$从同构**. 此时，



(1)



(2)

$\tilde{g}=\tilde{f}^{-1}$，且交换图表为图(2)，即 $\pi'\circ\tilde{f}=\pi$且 $\pi\circ\tilde{g}=\pi'$. 此外，如果$\tilde{f}$ C^r从映射覆盖Id_M，则易见$\tilde{f}$为C^r从同构.

例 1 中，ξ 为 C^r 平凡向量从$\Longleftrightarrow$存在 C^r 从同构$\tilde{f}:E\to M\times\mathbf{R}^m$(留作习题).

为考虑一个向量从被包含在另一个向量从内，我们定义从的限制和子从的概念. 然后，证明从同态的秩定理，由此得到两类子从的例子.

定义 5 设$\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \mathbf{R}), \mathbf{R}^m\}$为$C^r$向量从(或拓扑向量从)，$M_0\subset M$为$n_0$维$C^r$"正则"子流形，即对任何 $p\in M_0$，存在 p 在 M 中的局部坐标系(U, φ)，$\{x^i\}$使得$M_0\cap U=\{q\in U\mid x^j(q)=0, n_0+1\leqslant j\leqslant n\}$(或子拓扑空间)，则 $\xi_{M_0}=\{E|_{M_0}=\pi^{-1}(M_0), M_0, \pi|\pi^{-1}(M_0), \mathrm{GL}(m, \mathbf{R}), \mathbf{R}^m\}$为 M_0 上秩 m 的 C^r 向量从(或拓扑向量从)，称为 ξ 在 M_0 上的**限制**，记作 ξ_{M_0} 或 $E|_{M_0}$(图 15).

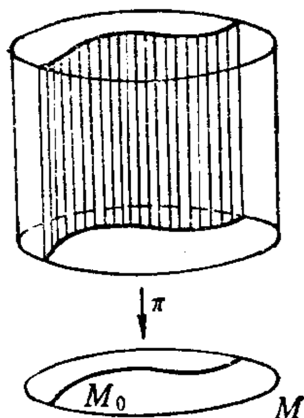


图 15

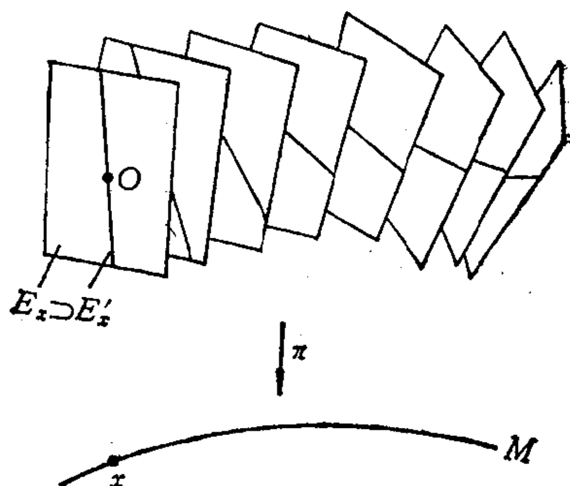


图 16

定义 6 设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\ \mathbf{R}^m\}$ 为秩 m 的 C^r 向量丛(或拓扑向量丛), $E'\subset E$ 为子集, 使对任何 $p\in M$, 存在丛图卡 $(\pi^{-1}(U),\psi)$ 使得 $p\in U$, 且 $\psi(\pi^{-1}(U)\cap E')=U\times\mathbf{R}^k\subset U\times\mathbf{R}^m$, 则 $(\pi^{-1}(U)\cap E',\psi|_{\pi^{-1}(U)\cap E'})$ 为 $\xi'=\{E',M,\pi|_{E'},\ \mathrm{GL}(k,\mathbf{R}),\mathbf{R}^k\}$ 的丛图卡. 于是, 易证 ξ' 为秩 k 的 C^r 向量丛, 称 ξ' 为 ξ(或 E' 为 E)的**秩 k 的 C^r 子向量丛(或拓扑子向量丛)**(图 16).

定理 1 (丛同态的秩定理)设 $\xi=\{E,M,\pi,\ \mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\mathbf{R}^m\}$ 和 $\eta=\{E',M,\pi',\mathrm{GL}(m',\mathbf{R}),\mathbf{R}^{m'}\}$ 为 C^r 向量丛, $(\tilde{f},\mathrm{Id}_M):\xi\to\eta$ 为 $\mathrm{rank}\tilde{f}_x=k$(常值)的 C^r 丛同态. 则对任何 $x\in M$, 存在 x 的关于 ξ 的丛图卡 $(\pi^{-1}(U),\psi)$ 和关于 η 的丛图卡 $(\pi'^{-1}(U),\ \psi')$ 使得对每个 $u\in U$ 有 $(\psi'\circ\tilde{f}\circ\psi^{-1})_u(v^1,\cdots,v^m)=(v^1,\cdots,v^k,0,\cdots,0)$.

$$\begin{array}{ccc}
E|_U & \xrightarrow{\ \tilde{f}\ } & E'|_U \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi'} \\
U\times\mathbf{R}^m & \xrightarrow{\ \psi'\circ\tilde{f}\circ\psi^{-1}\ } & U\times\mathbf{R}^{m'}
\end{array}$$

$$(u,(v^1,\cdots,v^m))\longmapsto(u,(v^1,\cdots,v^k,0,\cdots,0)).$$

证明 不失一般性, 对丛同态 $\tilde{f}:U\times\mathbf{R}^m\to U\times\mathbf{R}^{m'}$, $(u,v)\longmapsto$

$(u, \tilde{f}_u(v))$ 加以证明. 这里 $\tilde{f}_u = (\tilde{f}_u^1, \cdots, \tilde{f}_u^{m'}): \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^{m'}$ 为常秩 k 的线性映射,它由 C^r 依赖于 u 的矩阵所描述. 在经过 $\boldsymbol{R}^m$ 和 $\boldsymbol{R}^{m'}$ 中坐标的适当置换后,我们可以设矩阵 f_x 的开始 k 行和 k 列的子矩阵是非异的. 于是,从同态

$\psi: U \times \boldsymbol{R}^m \to U \times \boldsymbol{R}^m, \psi_u(v) = (\tilde{f}_u^1(v), \cdots, \tilde{f}_u^k(v), v^{k+1}, \cdots v^m)$ 为纤维 $u = x$ 上的同构,因此不失一般性,在每个纤维上为同构(ψ_u的行列式在 $u = x$ 不为 0, 则它在 x 的附近不为 0). 利用这从同态作$U \times \boldsymbol{R}^m$的新从图卡,我们得到

$$(\tilde{f} \circ \psi^{-1})_u(v) = (v^1, \cdots, v^k, g_u^{k+1}(v), \cdots, g_u^{m'}(v)).$$

因为它仍有秩 k, 故 $g_u^{k+1}, \cdots, g_u^{m'}$ 仅依赖于 $v^1, \cdots, v^k$, 即矩阵表示为

$$(\tilde{f} \circ \psi^{-1})_u = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ g & & 0 \end{pmatrix},$$

我们也可写作

$(\tilde{f} \circ \psi^{-1})_u(v) = (v^1, \cdots, v^k, \ g_u^{k+1}(v^1, \ \cdots, v^k), \cdots, \ g_u^{m'}(v^1, \cdots, v^k))$. 另一方面, 我们有从图卡 $(\pi'^{-1}(U), \ \psi')$ 使得 $\psi': U \times \boldsymbol{R}^{m'} \to U \times \boldsymbol{R}^{m'}$, $\psi'_u(w) = (w^1, \ \cdots, w^k, w^{k+1} - g_u^{k+1}(w^1, \cdots, w^k), \cdots, w^{m'} - g_u^{m'}(w^1, \cdots, w^k))$, 而$(\psi' \circ \tilde{f} \circ \psi^{-1})_u(v) = (v^1, \cdots, v^k, 0, \cdots, 0)$. #

例 5 设 $\tilde{f}: E \to E'$ 为常秩 $\mathrm{rank}\tilde{f}_x = k$ 的 C^r 从同态,则由定理 1 和定义 6 立即得到

$$\mathrm{Kernel}\tilde{f} = \bigcup_{x \in M} \mathrm{Kernel}\tilde{f}_x$$

为 E 的秩为 $m-k$ 的 C^r 子丛,而

$$\mathrm{Image}\tilde{f} = \bigcup_{x \in M} \mathrm{Image}\tilde{f}_x$$

为 E' 的秩 k 的 C^r 子丛, 其中 $\mathrm{Kernel}\tilde{f}_x = \{a \in \pi^{-1}(x) \mid \tilde{f}_x(a) = 0\}$

为 $\tilde{f}_x$ 的核，$\mathrm{Image}\tilde{f}_x=\{\tilde{f}_x(a)\,|\,a\in\pi^{-1}(x)\}$ 为 $\tilde{f}_x$ 的象.

例 6 设 $\xi_i=\{E_i, M, \pi_i, \mathrm{GL}(m_i,\boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^{m_i}, \mathscr{E}_i\}$, $i=1,2$ 为 C^r 向量丛. 令

$$E_1\oplus E_2=\bigcup_{x\in M}E_{1x}\oplus E_{2x},\quad \oplus \text{为直和};$$

投影 $\pi: E_1\oplus E_2\to M, \pi(a_x\oplus b_x)=x$;

$$\mathscr{E}'=\{(\pi^{-1}(U_1\cap U_2), \varphi_1\oplus\varphi_2)\,|\,(\pi_i^{-1}(U_i),\varphi_i)\in\mathscr{E}_i,\ i=1,2\},$$

$$(\varphi_1\oplus\varphi_2)_x=\varphi_{1x}\oplus\varphi_{2x}: E_{1x}\oplus E_{2x}\to\{x\}\times\boldsymbol{R}^{m_1}\times\boldsymbol{R}^{m_2},$$

$$(\varphi_{1x}\oplus\varphi_{2x})(a_x\oplus b_x)=(x,\varphi_{1x}(a_x)\oplus\varphi_{2x}(b_x)).$$

对任何 $(\pi_i^{-1}(U_{i\alpha}),\varphi_{i\alpha})$, $(\pi_i^{-1}(U_{i\beta}),\varphi_{i\beta})\in\mathscr{E}_i$, $i=1,2$ 有

$$(\varphi_{1\beta}\oplus\varphi_{2\beta})\circ(\varphi_{1\alpha}\oplus\varphi_{2\alpha})^{-1}(x,a\oplus b)$$

$$=(\varphi_{1\beta}\circ\varphi_{1\alpha}{}^{-1})\oplus(\varphi_{2\beta}\circ\varphi_{2\alpha}{}^{-1})(x,a\oplus b)$$

$$=(x, g_{1\beta\alpha}(x)a\oplus g_{2\beta\alpha}(x)b)=\left(x,\begin{pmatrix}g_{1\beta\alpha}(x) & 0\\ 0 & g_{2\beta\alpha}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right),$$

$$\begin{pmatrix}g_{1\beta\alpha}(x) & 0\\ 0 & g_{2\beta\alpha}(x)\end{pmatrix}\in H=\left\{\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\middle| A_i\in\mathrm{GL}(m_i,\boldsymbol{R}), i=1,2\right\}$$

$\subset\mathrm{GL}(m_1+m_2,\boldsymbol{R})$，其中 H 为 $\mathrm{GL}(m_1+m_2,\boldsymbol{R})$ 的 C^ω Lie 子群.

显然 $\mathscr{E}'$ 唯一确定了一个最大丛图册 $\mathscr{E}$，而拓扑基 $\tau^*=\{\pi^{-1}(U_1\cap U_2)$ 中开集 $|(\pi_i^{-1}(U_i), \varphi_i)\in\mathscr{E}_i, i=1,2\}$ 确定了 $E_1\oplus E_2$ 上的一个拓扑，易见使 $E_1\oplus E_2$ 为 C^r 流形. 我们称 $\xi=\xi_1\oplus\xi_2=\{E_1\oplus E_2, M, \pi, \mathrm{GL}(m_1+m_2,\boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^{m_1+m_2}, \mathscr{E}\}$ 为 C^r 向量丛 ξ_1 和 ξ_2 的 **Whitney** 和. 注意，我们也用 H 代替 $\mathrm{GL}(m_1+m_2,\boldsymbol{R})$ 得到相应的 C^r 向量丛.

例 7 设 $\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}\}$ 为 C^r 向量丛. 令

$E^*=\bigcup\limits_{x\in M}E_x^*$，其中 $E_x^*=\{\theta\,|\,\theta: E_x\to\boldsymbol{R}$ 为线性函数$\}$ 为 E_x 的对偶空间; 投影 $\pi^*: E^*\to M$, 使 $\pi^*|_{E_x^*}=x, x\in M$;

$$\mathscr{E}^{*\prime}=\{(\pi^{*-1}(U_\alpha),\psi_\alpha^{*-1})\mid(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{E}\},$$

其中 $\pi^{*-1}(U_\alpha)\xleftarrow{\psi_\alpha^*}U_\alpha\times(\boldsymbol{R}^m)^*\cong U_\alpha\times\boldsymbol{R}^m$ 定义如下:

$$\{x\}\times\boldsymbol{R}^m\xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}|_x}E_x\xrightarrow{\psi_\beta|_x}\{x\}\times\boldsymbol{R}^m$$

$$\begin{array}{ccccc}\{x\}\times(\boldsymbol{R}^m)^* & \xleftarrow{\psi_\alpha^{-1}|_x^*} & E_x^* & \xleftarrow{\psi_\beta|_x^*} & \{x\}\times(\boldsymbol{R}^m)^*\\ \cong & & & & \cong\\ \{x\}\times\boldsymbol{R}^m & & & & \{x\}\times\boldsymbol{R}^m\end{array}$$

这里,$(x,b)=\psi_\beta|_x\circ\psi_\alpha^{-1}|_x(x,a)=(x,g_{\beta\alpha}(x)a)$,根据线性映射$g_{\beta\alpha}(x)$的共轭线性映射 $g_{\beta\alpha}(x)^*$ 的定义 $g_{\beta\alpha}(x)^*(b^*)(a)=b^*(g_{\beta\alpha}(x)a)$得到 $g_{\beta\alpha}(x)^*=g_{\beta\alpha}(x)'$($g_{\beta\alpha}(x)$的转置矩阵). 于是,

$$\begin{aligned}(x,a^*)&=\psi_\alpha^{-1}|_x{}^*\circ\psi_\beta|_x{}^*(x,b^*)=(\psi_\beta|_x\circ\psi_\alpha^{-1}|_x)^*(x,b^*)\\&=(x,g_{\beta\alpha}(x)^*b^*)=(x,g_{\beta\alpha}(x)'b^*),\end{aligned}$$

或
$$(x,b^*)=(x,(g_{\beta\alpha}(x)')^{-1}a^*).$$

其中$(g_{\beta\alpha}(x)')^{-1}\in\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})$. 设 $\mathscr{E}^*$ 为由 $\mathscr{E}^{*\prime}$ 唯一确定的 E^* 的丛图册,则称

$$\xi^*=\{E^*,M,\pi^*,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^m,\mathscr{E}^*\}$$

为 ξ 的 **C^r对偶丛**(易见$(g_{\beta\alpha}(x)')^{-1}$关于 x 是 C^r 类的).

例 8 设 $\xi=\{F,N,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^m,\mathscr{E}\}$ 为C^r 向量丛(或拓扑向量丛), M为 C^r 流形(或拓扑空间), $f:M\to N$ 为 C^r 映射(或连续映射). 令

$$f^*F=\{(x,e)\in M\times F\mid f(x)=\pi(e)\}\subset M\times F,$$

投影 $\pi^*:f^*F\to M$, $\pi^*(x,e)=x$, 于是, $(\pi^*)^{-1}(x)=\{(x,e)\mid e\in\pi^{-1}(f(x))\}$以 $\pi^{-1}(f(x))$上的向量构造作为它的向量构造. 设

$$\mathscr{E}^{*\prime}=\{((\pi^*)^{-1}(f^{-1}(U_\alpha)),\tilde{\psi}_\alpha)\mid(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{E}\},$$

其中 $\tilde{\psi}_\alpha|_x:(f^*F)_x\to\{x\}\times\boldsymbol{R}^m$由$\psi_\alpha|_{f(x)}:F_{f(x)}\to\{f(x)\}\times\boldsymbol{R}^m$确定. 易见 $\tilde{g}_{\beta\alpha}(x)a=g_{\beta\alpha}(f(x))a$, 故 $\tilde{g}_{\beta\alpha}(x)=g_{\beta\alpha}(f(x))\in\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})$, 且 $\tilde{g}_{\beta\alpha}=g_{\beta\alpha}\circ f:f^{-1}(U_\alpha)\cap f^{-1}(U_\beta)\to\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})$ 为 C^r 映射. 此外,

f^*F 作为 $M\times F$ 的子集，其拓扑或流形构造是明显的，自然，$\mathscr{E}^{*\prime}$ 唯一确定了一个 f^*F 的丛图册 $\mathscr{E}^*$，我们称

$$f^*\xi=\{f^*F, M, \pi^*, \mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}^*\}$$

为由 f 得到的 ξ 的**诱导丛**.

定义 $\tilde{f}: f^*F\to F, \tilde{f}(x,e)=e$，不难看出，$\tilde{f}$ 从映射覆盖 f.

$$\begin{array}{ccc} M\times F\supset f^*F \ni (x,e) & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \quad \tilde{f}(x,e)=e\in F_{f(x)} \\ \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

$$\pi^*(x,e)=x \qquad f\circ\pi^*(x,e)=f(x)=\pi\circ\tilde{f}(x,e)$$

诱导丛具有以下重要性质:

定理 2 （诱导丛的万有性质） 设 $\{E, M, \pi'\}$，$\{F, N, \pi\}$ 为 C^r（或拓扑）向量丛，$f: M\to N$ 为 C^r（或连续）映射，$\{f^*F, M, \pi^*\}$ 为由 f 得到的 $\{F, N, \pi\}$ 的诱导丛，由例 8，$\tilde{f}: f^*F\to F$ 从映射覆盖 f，$(\tilde{\varphi}, f):\{E, M, \pi'\}\to\{F, N, \pi\}$ 为 C^r（或连续）从映射. 则存在 C^r（或连续）从同态 $(\tilde{h}, \mathrm{Id}_M):\{E, M, \pi'\}\to\{f^*F, M, \pi^*\}$ 使 $\tilde{\varphi}=\tilde{f}\circ\tilde{h}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\tilde{\varphi}}{\frown} & & \\ E & \xrightarrow{\tilde{h}} & f^*F & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \\ & \searrow^{\pi'} & \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi \\ & & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

证明 由 $f(\pi'(v))=\pi(\tilde{\varphi}(v))$ 可知，$\tilde{h}(v)=(\pi'(v), \tilde{\varphi}(v))$，$f^*F\subset M\times F$ 且 $\tilde{f}\circ\tilde{h}(v)=\tilde{f}(\pi'(v), \tilde{\varphi}(v))=\tilde{\varphi}(v)$，$\tilde{f}\circ\tilde{h}=\tilde{\varphi}$. ＃

为了定义向量丛的定向，我们先回忆一下 m 维 Euclid 空间

$\boldsymbol{R}^m$ 中的定向. 设$\{e_i \mid i=1,\cdots,m\}$和$\{\bar{e}_i \mid i=1,\cdots,m\}$为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的两个基，且

$$\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \vdots\\ \bar{e}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}\cdots c_{1m}\\ \cdots\\ c_{m1}\cdots c_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix},$$

如果 $\det(c_{ij})>0$，则称基 $\{\bar{e}_i \mid i=1,\cdots,m\}$和$\{e_i \mid i=1,\cdots,m\}$是同向的；如果 $\det(c_{ij})<0$，则称基$\{\bar{e}_i \mid i=1,\cdots,m\}$和$\{e_i \mid i=1,\cdots,m\}$是反向的. 因此，$\boldsymbol{R}^m$ 恰有两个定向. 有时，用 $\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}$ 表示由有序基 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 所对应的定向. 如果 $\det(c_{ij})>0$，则 $\overrightarrow{[\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_m]}=\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}$；如果 $\det(c_{ij})<0$，则 $\overrightarrow{[\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_m]}=-\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}$. 为方便，约定 $\boldsymbol{R}^0=\{0\}$也恰有两个定向$\{+1,-1\}$.

通过对每个纤维的定向给出向量丛的定向，并且期望沿底空间的任一道路，使得定向不致突然“跳跃”. 下面介绍向量丛的定向的概念.

定义 7 设$\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^m,\mathscr{E}\}$为$C^r$(或拓扑)向量丛，$\mathscr{O}=\{o_x \mid x\in M\}$，其中 o_x 为纤维 E_x 的一个定向. 如果存在 $\mathscr{E}_1'\subset\mathscr{E}$，使得$\{U \mid (\pi^{-1}(U),\psi)\in\mathscr{E}_1'\}$覆盖$M$，且对任何 $x\in U$，同构ψ_x: $E_x\to\boldsymbol{R}^m$ 将纤维 E_x 的定向 $o_x=\overrightarrow{[a_1(x),\cdots,a_m(x)]}$变为 $\boldsymbol{R}^m$ 的固定的定向 $\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}$，即 $\psi_x(o_x)=\overrightarrow{[\psi_x(a_1(x)),\ \cdots,\ \psi_x(a_m(x))]}=\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}$，则称 $\mathscr{O}=\{o_x \mid x\in M\}$为 ξ 或 E 的一个**定向**. 显然，存在一个满足上述条件的最大子从图册$\mathscr{E}_1$，使 $\mathscr{E}_1'\subset\mathscr{E}_1\subset\mathscr{E}$. 称 $\mathscr{E}_1$ 中的元素为与定向 $\mathscr{O}$一致的从图卡.

如果 ξ 有定向，则称它为**可定向**的；如果 ξ 不存在定向，则称它为**不可定向**的.

关于ξ 的可定向和不可定向有以下定理：

定理 3 设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\mathbf{R}^m,\mathscr{E}\}$ 为 C^r（或拓扑）向量丛，则

ξ 可定向 $\Longleftrightarrow$ 存在子丛图册 $\mathscr{E}_1'\subset\mathscr{E}$，使对任何 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$，$(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)\in\mathscr{E}_1'$，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，有

$$\det g_{\beta\alpha}(x)>0,\quad x\in U_\alpha\cap U_\beta,$$

且 $\{U\mid(\pi^{-1}(U),\psi)\in\mathscr{E}_1'\}$ 覆盖 M.

证明 $(\Longrightarrow)$ 设 $\mathscr{O}=\{o_x\mid x\in M\}$ 为 ξ 的定向，由定义 7，$\{U\mid(\pi^{-1}(U),\psi)\in\mathscr{E}_1'\}$ 覆盖 M，且对任何 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$，$(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)\in\mathscr{E}_1'$，由 $\mathbf{R}^m\xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}|_x}E_x\xrightarrow{\psi_\beta|_x}\mathbf{R}^m$ 和 $\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}\overset{\psi_\alpha^{-1}|_x}{\longmapsto}o_x\overset{\psi_\beta|_x}{\longmapsto}\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}$ 可知，$\det g_{\beta\alpha}(x)>0$，$x\in U_\alpha\cap U_\beta$.

$(\Longleftarrow)$ 如果存在 $\mathscr{E}_1'\subset\mathscr{E}$ 满足右边条件，对任何 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$，$(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)\in\mathscr{E}_1'$，$x\in U_\alpha\cap U_\beta$，由 $\det g_{\beta\alpha}(x)>0$ 得到 $\psi_\alpha^{-1}|_x(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})=\psi_\beta^{-1}|_x(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})$，则明显地，

$\mathscr{O}=\{o_x=\psi_\alpha^{-1}|_x(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})\mid x\in M$，存在 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{E}_1'$ 使 $x\in U_\alpha\}$

为 ξ 的一个定向. #

定理 4 设 M 为连通的 C^r 流形（或连通拓扑空间），$\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\mathbf{R}^m,\mathscr{E}\}$ 为 C^r（或拓扑）向量丛. 如果 ξ 可定向，则它恰有两个定向.

证明 设 $\mathscr{O}=\{o_x\mid x\in M\}$ 为 ξ 的一个定向，$\mathscr{E}_1$ 为定义 7 中所述，则 $\mathscr{O}^-=\{-o_x\mid x\in M\}$ 为 ξ 的另一定向，相应于 $\mathscr{E}_1$ 的子丛图册为 $\mathscr{E}_1^-=\{(\pi^{-1}(U),\rho_{反}\circ\psi)\mid(\pi^{-1}(U),\psi)\in\mathscr{E}_1\}$，其中 $\rho_{反}:U\times\mathbf{R}^m\to U\times\mathbf{R}^m$，$\rho_{反}(x,(a^1,\cdots,a^m))=(x,(a^1,\cdots,a^{m-1},-a^m))$. 于是，$\xi$ 至少有两个定向. 下面证明 ξ 至多有两个定向，即若 $\mu=\{\mu_x\mid x\in M\}$ 和 $\nu=\{\nu_x\mid x\in M\}$ 为 ξ 的任意两个定向，则必有 $\mu=\nu$ 或 $\mu=\nu^-$.

记 $S=\{x\in M\mid\mu_x=\nu_x\}$. 对任意 $x\in S$，取含 x 的丛图卡

$(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{E}_\mu$ 和 $(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)\in\mathscr{E}_\nu$($\mathscr{E}_\mu$ 和 $\mathscr{E}_\nu$ 分别为 μ 和 ν 的子丛图册). 由于 $\mu_x=\nu_x$, 于是有

$$\det g_{\beta\alpha}(x)>0.$$

由连续性, 存在 x 的开邻域 $U\subset U_\alpha\cap U_\beta$, 使得

$$\det g_{\beta\alpha}(u)>0, u\in U.$$

易见 $\mu_u=\nu_u, u\in U$, 故 $U\subset S$, 即 S 为 M 中的开集.

由于 $M-S=\{x\in M\mid\mu_x\neq\nu_x\}=\{x\in M\mid\mu_x=-\nu_x\}$ 和 ν^- 也是 ξ 的一个定向, 再根据 S 为开集的结论, $M-S$ 也为 M 的开集. 从 M 连通知 $S=\varnothing$ 或 $M=S$. 若 $S=\varnothing$, 则有 $\mu=\nu^-$; 若 $S=M$, 则有 $\mu=\nu$. #

定理 5 设 $\mathscr{O}=\{o_x\mid x\in M\}$ 为 C^r(或拓扑)向量丛 $\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m,\mathbf{R}), R^m, \mathscr{E}\}$ 的一个定向.

(1) 如果 $(\pi^{-1}(U), \psi)\in\mathscr{E}$, 且 U 为 M 的连通开集, $\psi^{-1}|_p(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})=o_p$, p 为 U 中固定点, 则对任意 $x\in U$, $\psi^{-1}|_x(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})=o_x$, 即 $(\pi^{-1}(U),\psi)\in\mathscr{E}_1$ 为与 $\mathscr{O}$ 一致的丛图卡.

(2) 如果 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha), (\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)\in\mathscr{E}$, U_α, U_β 为 M 的连通开集, 则恒有 $\det g_{\beta\alpha}(x)>0$, $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ 或恒有 $\det g_{\beta\alpha}(x)<0$, $x\in U_\alpha\cap U_\beta$.

证明 (1) 显然, $\mu=\{\mu_x=\psi^{-1}|_x(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})\mid x\in U\}$ 为向量丛 $\pi^{-1}(U)$ 上的一个定向. 因为 U 连通, 根据定理4, $\mu=\{o_x\mid x\in U\}=\mathscr{O}|_U$ 或 $\mathscr{O}^-|_U$. 又因 $\mu_p=o_p$, 故 $\mu=\mathscr{O}|_U$.

(2) 因为 U_α, U_β 为 M 中的连通开集, 根据(1), 丛图卡 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha), (\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)$ 为定向丛图卡或反向丛图卡. 于是, 对任意 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ 有

$$\det g_{\beta\alpha}(x)\begin{cases}>0, (\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\text{和}(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)\text{ 同为定向或同为反向从图卡,}\\ <0, (\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\text{和}(\pi^{-1}(U_\beta,\psi_\beta)\text{一为定向另一为反向从图卡.}\end{cases}$$

定义 8 设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^m,\mathscr{E}\}$ 为 C^r(或拓扑)向量丛,σ: $[0,1]\to M$ 为一条(C^0类的)道路,$\mu=\{\mu_{\sigma(t)}\mid t\in[0,1]\}$,其中 $\mu_{\sigma(t)}$ 为纤维 $E_{\sigma(t)}$ 中的一个定向. 如果对任何 $t_0\in[0,1]$, 存在 $\varepsilon>0$ 和 $(\pi^{-1}(U),\psi)\in\mathscr{E}$, 使得 $\sigma((t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)\cap[0,1])\subset U$, 且 $\mu_{\sigma(t)}=\psi^{-1}|_{\sigma(t)}(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})$,则称 μ 为沿 σ 的**连续定向**.

定理 6 设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\ \boldsymbol{R}^m,\mathscr{E}\}$ 为 C^r(或局部道路连通的拓扑)向量丛. 则

(1) ξ 不可定向;$\Leftrightarrow$(2) 存在 $(\pi^{-1}(U_i),\psi_i)\in\mathscr{E}$,$U_i$ 道路连通, $i=1,\ \cdots,\ k$ 和 $p_k\in U_k\cap U_1 p_i\in U_i\cap U_{i+1}$, $i=1,\ \cdots,\ k-1$, 满足 $\det g_{i+1,i}(p_i)>0$ 而 $\det g_{1,k}(p_k)<0$; $\Leftrightarrow$(3) 存在闭道路 σ: $[0,1]\to M$, $\sigma(0)=\sigma(1)$ 和沿 σ 的连续定向 $\mu=\{\mu_{\sigma(t)}\mid t\in[0,1]\}$, 使得 $\mu_{\sigma(0)}=-\mu_{\sigma(1)}$; $\Leftrightarrow$(4) 存在点 p, $q\in M$ 和从 p 到 q 的两条道路 σ_i: $[0,\ 1]\to M$ 以及沿 σ_i 的连续定向 $\mu_i=\{\mu_{i\sigma_i(t)}\mid t\in[0,\ 1]\}$, $i=1,\ 2$, 使得 $\mu_{1p}=\mu_{1\sigma_1(0)}=\mu_{2\sigma_2(0)}=\mu_{2p}$, $\mu_{1q}=\mu_{1\sigma_1(1)}=-\mu_{2\sigma_2(1)}=-\mu_{2q}$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 设 ξ 不可定向. 因为 C^r 流形 M 是局部道路连通的,故道路连通分支是 M 的开集,从而至少有 M 的一个道路连通分支U,使得 $\pi^{-1}(U)$是不可定向的. 不失一般性,设M是道路连通的. 固定 $p\in M$,对任何 $x\in M$,存在连接 p和 x 的道路 σ_{px}: $[0,1]\to M$. 因$\sigma_{px}([0,1])\subset M$为紧致集和 M 为局部道路连通,故存在从图卡$(\pi^{-1}(U_i^x,\psi_i^x)\in\mathscr{E}$, $i=1,\cdots,k(x)$,使得 $U_i^x\subset M$ 为道路连通,且 $\sigma_{px}([0,\ 1])\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k(x)}U_i^x$, $p\in U_1^x$, $x\in U_{k(x)}^x$. 此外,有 $p_i^x\in\sigma_{px}$-

$([0,\ 1])\cap U_i^x \cap U_{i+1}^x$, $i=1,\ \cdots, k(x)-1$, 满足 $\det g_{i+1,i}(p_i^x)>0$. 令 $\mathscr{E}_1'=\{(\pi^{-1}(U_i^x),\ \psi_i^x)\in\mathscr{E}\mid x\in M,\ i=1,\ \cdots,\ k(x)\}$. 从 $\bigcup\limits_{x\in M}\bigcup\limits_{i=1}^{k(x)} U_i^x=M$ 以及 ξ 不可定向可知,必有 $a,b\in M$,使 $\det\cdot g_{j;i}^{b;a}(c)<0$, 其中 $c\in U_i^a\cap U_j^b$, $g_{j;i}^{b;a}$ 为从图卡 $(\pi^{-1}(U_i^a\psi_i^a)$和$(\pi^{-1}(U_j^b)$, $\psi_j^b)$的转换映射. 如果总选 $\det g_{1;1}^{x;y}(p)>0$,则$(\pi^{-1}(U_i^a),\psi_i^a),\cdots,(\pi^{-1}(U_1^a),\psi_1^a),(\pi^{-1}(U_1^c),\psi_1^b),\cdots,(\pi^{-1}(U_j^b),\ \psi_j^b),p_{i-1}^a,\ \cdots,p_1^a,p,p_1^b,\cdots,p_{j-1}^b,c$ 满足(2).

(2)⇒(3) 设(2)成立,由于 U_i 道路连通, 故存在 M 中的一条道路 $\sigma:[0,1]=[t_1,t_{k+1}]\to M$, 使得 $\sigma(t_i)=p_i, i=1,\ \cdots,\ k$, $\sigma(t_{k+1})=p_1$, $0=t_1<t_2<\cdots<t_k<t_{k+1}=1$, 且 $\sigma([t_i,\ t_{i+1}]\subset U_{i+1}, i=1,\cdots,k-1$, $\sigma([t_k,t_{k+1}])\subset U_1$. 又因 $\det g_{i+1,i}(p_i)>0$ 而 $\det g_{1,k}(p_k)<0$,令

$$\mu_{\sigma(t)}=\begin{cases}\psi_i^{-1}\big|_{\sigma(t)}(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}),\ t\in[t_i,t_{i+1}],\ i=1,\cdots,k-1,\\ \psi_1^{-1}\big|_{\sigma(t)}(-\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]}),\ t\in[t_k,t_{k+1}].\end{cases}$$

显然,$\mu=\{\mu_{\sigma(t)}\mid t\in[t_1,t_{k+1}]=[0,1]\}$ 为沿 σ 的连续定向,且$\mu_{\sigma(0)}=\mu_{\sigma(t_1)}=\psi_1^{-1}\big|_{\sigma(t_1)}(\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})=-\psi_1^{-1}\big|_{\sigma(t_{k+1})}(-\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_m]})=-\mu_{\sigma(t_{k+1})}=-\mu_{\sigma(1)}$.

(3)⇒(4) 如果(3)成立,则存在闭道路 $\sigma:[0,1]\to M$, $\sigma(0)=\sigma(1)$和沿 σ 的连续定向 $\mu=\{\mu_{\sigma(t)}\mid t\in[0,1]\}$, $\mu_{\sigma(0)}=-\mu_{\sigma(1)}$. 令道路

$$\sigma_i:[0,1]\to M, i=1,2$$

为 $\sigma_1(t)=\sigma\left(\frac{1}{2}t\right)$, $t\in[0,1]$, $\sigma_2(t)=\sigma\left(1-\frac{1}{2}t\right)$, $t\in[0,1]$, 则

$\sigma_1(0)=\sigma(0)=\sigma(1)=\sigma_2(0),\sigma_1(1)=\sigma\left(\frac{1}{2}\right)=\sigma_2(1)$,再令

$$\mu_{1\sigma_1(t)}=\mu_{\sigma\left(\frac{1}{2}t\right)}, \quad \mu_{2\sigma_2(t)}=-\mu_{\sigma\left(1-\frac{1}{2}t\right)},$$

则 $\mu_i=\{\mu_{i\sigma_i(t)}\mid t\in[0,\ 1]\}$ 为沿 σ_i 的连续定向，$i=1,2$，使得 $\mu_{1\sigma_1(0)}=\mu_{\sigma(0)}=-\mu_{\sigma(1)}=\mu_{2\sigma_2(0)}$，$\mu_{1\sigma 1(1_1)}=\mu_{\sigma\left(\frac{1}{2}\right)}=-\mu_{2\sigma_2(1)}$.

(4)⇒(1) (反证)假设 ξ 可定向，$\mathscr{O}=\{o_x\mid x\in M\}$ 为其定向. 对任何 $p,q\in M$ 和连 p,q 的任两道路 σ_i: $[0,1]\to M$，沿 σ_i 的连续定向 $\mu_i=\{\mu_{i\sigma_i(t)}\mid t\in[0,1]\}$，$i=1,2$，且 $\mu_{1\sigma_1(0)}=\mu_{2\sigma_2(0)}$. 不失一般性，设 $\mu_{1\sigma_1(0)}=\mu_{2\sigma_2(0)}=o_{\sigma_1(0)}=o_p$. 由定义 8，显然 $S=\{t\in[0,\ 1]\mid \mu_{1\sigma_1(t)}=o_{\sigma_1(t)}\}$ 和 $[0,1]-S=\{t\in[0,1]\mid \mu_{1\sigma_1(t)}\neq o_{\sigma_1(t)}\}=\{t\in[0,1]\mid \mu_{1\sigma_1(t)}=-o_{\sigma_1(t)}\}$ 都为开集. 再由 $[0,\ 1]$ 连通和 $0\in S$，故 $S=[0,\ 1]$，从而 $\mu_{1\sigma_1(t)}=o_{\sigma_1(t)}$. 同理，$\mu_{2\sigma_2(t)}=o_{\sigma_2(t)}$，所以 $\mu_{1\sigma_1(1)}=o_{\sigma_1(1)}=o_q=o_{\sigma_2(1)}=\mu_{2\sigma_2(1)}$. 即(4)不成立，矛盾. #

作为习题读者证明(4)⇒(3)，(2)⇒(1)等.

从定理 6 立即得到 ξ 可定向的充要条件.

定理 7 设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^m,\ \mathscr{E}\}$ 为 C^r(或局部道路连通的拓扑)向量丛. 则

(1) ξ 可定向;

⇔(2) 对于 M 中任何闭道路 σ: $[0,1]\to M$，$\sigma(0)=\sigma(1)$ 和沿 σ 的连续定向 $\mu=\{\mu_{\sigma(t)}\mid t\in[0,1]\}$，必有 $\mu_{\sigma(0)}=\mu_{\sigma(1)}$. ⇔(3) 对于任何 $p,q\in M$ 和连 p,q 的两条道路 σ_i: $[0,1]\to M$ 以及沿 σ_i 的连续定向 $\mu_i=\{\mu_{i\sigma_i(t)}\mid t\in[0,\ 1]\}$，$i=1,\ 2$，且 $\mu_{1\sigma_1(0)}=\mu_{2\sigma_2(0)}$，则必有 $\mu_{1\sigma_1(1)}=\mu_{2\sigma_2(1)}$.

例 9 例 2 中，Möbius 带 E 作为秩 1 的实向量丛 $\xi=\{E,S^1,\pi,\mathrm{GL}(1,\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}^1\}$，沿中心线相应的闭道路 σ: $[0,1]\to E^1$，$\sigma(0)=\sigma(1)$ 的连续定向 $\mu=\{\mu_{\sigma(t)}\mid t\in[0,1]\}$，必有 $\mu_{\sigma(0)}=-\mu_{\sigma(1)}$，故 ξ 或 E 不可定向. 或如例 2 所述，由 $g_{21}([x])=\begin{cases}1, & [x]\in V_1,\\ -1, & [x]\in V_2,\end{cases}$ 和

定理 6(2)可知,ξ 或E是不可定向的.

§3 切　丛

为建立 n_1 维 C^∞ 流形$(M_1, \mathscr{D}_1)$到 n_2 维 C^∞ 流形$(M_2, \mathscr{D}_2)$的 C^∞ 映射 f: $M_1 \to M_2$ 在 $p \in M_1$ 的微分或 Jacobi 映射，必须将 C^∞ 流形 M_1 和 M_2 分别在 p 和 $f(p) \in M_2$ 处线性化，即在相应点处引进切空间的概念. 它是 Euclid 空间中光滑曲线或曲面在其每个点处的切线或切平面的推广. 为便于将 $\boldsymbol{R}^n$ 中切向量推广到 C^∞ 流形上去，我们来研究方向导数的性质，并用“映射”或“算子”的观点定义切向量，这种观点就是近代数学观点，或称为不变观点.

设 U_f 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中含 p 的开集，$f: U_f \to \boldsymbol{R}$ 为 C^1 类函数，C^1 曲线 $x(t)$, $x(0)=p$, $x'(0)=X_p$, 则 f 在 p 点沿 X_p 的方向导数为

$$X_p f = \frac{df(x(t))}{dt}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\frac{dx^i}{dt}(0)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (X_p x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) f,$$

特别, $X_p x^j = \dfrac{dx^j(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \dfrac{dx^j}{dt}(0)$. 容易看出, $\{X_p f \mid f: U_f \to \boldsymbol{R}^1$ 为 C^1 映射$\}$完全确定了 X_p. 事实上, $\{X_p x^j \mid j=1, \cdots, n\}$完全确定了 X_p. 此外, X_p 具有性质:

(1) 若存在含 p 的开集 $U \subset U_f \cap U_g$, 使 $f|_U = g|_U$, (称$(f, U_f) \sim (g, U_g)$), 则 $X_p f = X_p g$;

(2) $X_p(f+g) = X_p f + X_p g$, $\qquad U_{f+g} = U_f \cap U_g$;

$X_p(\lambda f) = \lambda \cdot X_p f$, $\qquad \lambda \in \mathbf{R}, U_{\lambda f} = U_f$;

(3) $X_p(fg) = g(p) X_p f + f(p) X_p g$, $\quad U_{fg} = U_f \cap U_g$.

定义 1 设$(M, \mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 流形, $C^\infty(p) = \{(f, U_f) \mid p \in U_f \subset M, U_f$ 为M的开集, $f: U_f \to \boldsymbol{R}$ 为 C^∞ 函数$\}$. 如果映射 X_p: $C^\infty(p)$

$\to \boldsymbol{R}, f \mapsto X_p f$，对任意$(f, U_f), (g, U_g) \in C^\infty(p), \lambda \in \boldsymbol{R}$ 满足：

(1) 若$(f, U_f) \sim (g, U_g)$，则 $X_p f = X_p g$；

(2) $\left.\begin{array}{ll} X_p(f+g) = X_p f + X_p g, & U_{f+g} = U_f \cap U_g; \\ X_p(\lambda f) = \lambda X_p f, & U_{\lambda f} = U_f; \end{array}\right\}$线性性

(3) $X_p(fg) = g(p) X_p f + f(p) X_p g$，$U_{fg} = U_f \cap U_g$；导性则称 X_p 为 p 点处的一个切向量.

定义 2 设$T_pM = \{X_p \mid X_p$为 p 点处的切向量$\}$. 如果$X_p, X_{1p}, X_{2p} \in T_pM, \lambda \in \boldsymbol{R}$，则我们在 T_pM 中定义

加法 $(X_{1p} + X_{2p}) f = X_{1p} f + X_{2p} f$，

数乘 $(\lambda X_p) f = \lambda X_p f$.

易见 $X_{1p} + X_{2p}, \lambda X_p \in T_pM$，且 T_pM 关于上述加法和数乘满足向量空间的各个条件，使 T_pM 成为一个向量空间，称它为 p 点处的**切空间**.

定理 1 T_pM 为 n 维向量空间.

证明 设$(U, \varphi), \{x^i \mid i = 1, \cdots, n\}$为 p 的局部坐标系，我们定义坐标向量$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$. 令

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : C^\infty(p) \to \boldsymbol{R}, \quad \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)),$$

容易验证$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$满足定义 1 的(1)，(2)，(3)，故$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$.

如果$\sum_{i=1}^n \lambda^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = 0$ （0 为零切向量，即 $0f = 0$），则有

$$0 = 0x^j = \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) x^j = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p x^j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j, \quad j = 1, \cdots, n,$$

故$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p\right\}$是线性无关的.

再证对任何 $X_p\in T_pM$，有 $X_p=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_px^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$，于是，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p\right\}$为 T_pM 的一个基，从而 T_pM 为 n 维向量空间.

对任意$(f,U_f)\in C^\infty(p)$，取 p 的局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$，令 $\varphi(p)=a,\varphi(q)=x$，则有

$$\begin{aligned}
f(q)&=f(p)+f\circ\varphi^{-1}(x)-f\circ\varphi^{-1}(a)\\
&=f(p)+\int_0^1\frac{d}{dt}f\circ\varphi^{-1}(a+t(x-a))dt\\
&=f(p)+\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(a+t(x-a))(x^i-a^i)dt\\
&=f(p)+\sum_{i=1}^{n}(x^i-a^i)\int_0^1\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(a+t(x-a))dt\\
&=f(p)+\sum_{i=1}^{n}(x^i-a^i)\bar{g}_i(x)=f(p)+\sum_{i=1}^{n}(x^i(q)-a^i)g_i(q),
\end{aligned}$$

其中 $g_i(q)=\bar{g}_i\circ\varphi(q)=\int_0^1\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(a+t(x-a))dt$，

$$g_i(p)=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(a).$$

由 $X_p1=X_p(1\cdot1)=1\cdot X_p1+1\cdot X_p1=2X_p1$，$X_p1=0$ 立即可知 $X_p\lambda=X_p(\lambda\cdot1)=\lambda X_p1=0,\lambda\in\mathbf{R}$. 再由定义 1 中的(2)，(3)得到

$$\begin{aligned}
X_pf&=X_pf(p)+\sum_{i=1}^{n}g_i(p)\cdot X_p(x^i-a^i)+\sum_{i=1}^{n}(a^i-a^i)\cdot X_pg_i\\
&=0+\sum_{i=1}^{n}(X_px^i)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(a)+0=\left(\sum_{i=1}^{n}(X_px^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)f,
\end{aligned}$$

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} (X_p x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \qquad (图 17). \qquad \#$$

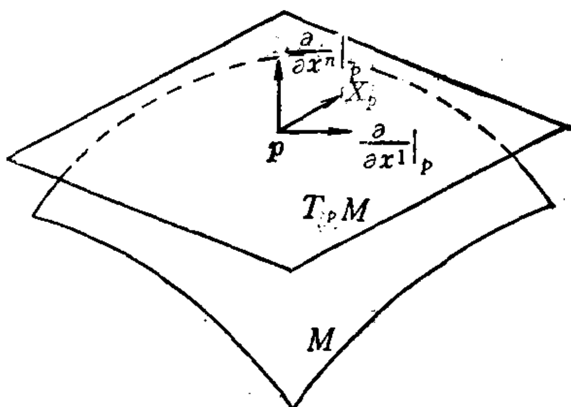


图 17

注意：由M和f的C^∞性，g_i也是C^∞的，故$X_p g_i$有意义！

设$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$和$(U_\beta, \varphi_\beta)$，$\{y^i\}$为$p$点的两个局部坐标系，由

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p f &= \frac{\partial(f\circ\varphi_\beta^{-1})}{\partial y^j}(\varphi_\beta(p)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(\varphi_\beta(p)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(\varphi_\beta(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) f
\end{aligned}$$

得到坐标基变换公式 $\displaystyle \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(\varphi_\beta(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$ 和

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}_{\varphi_\beta(p)} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix}_p .$$

再由$\displaystyle \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p = X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p))\cdot$

$\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p))a^i\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$，得到切向量变换公式

$b^j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p))a^i$ 和

$$\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix},$$

其中$\{a^i\}$和$\{b^i\}$分别称为切向量X_p关于局部坐标系$\{x^i\}$和$\{y^i\}$的分量．由此，可用"坐标"观点定义切向量，这就是所谓的古典观点，通常在物理学中习惯于这种定义：设L_p为p点的局部坐标系的全体，如果映射X_p: $L_p\to \mathbf{R}^n$使得对任何$\{x^i\}$，$\{y^i\}\in L_p$有$X_p(\{x^i\})=\{a^i\}$,$X_p(\{y^i\})=\{b^i\}$且满足上述后一个变换公式,则称X_p为p点的一个切向量．这定义的优点在于只要求M为$C^r(r\geqslant$)流形．

在每一点$p\in M$有一个n维切空间,自然我们可以从沿M的这一族切空间得到一个秩n的向量丛，称为切丛，它是$2n$维C^∞流形．

定义 3 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形,我们定义M的切丛$\xi=\{TM, M, \pi, \mathrm{GL}(n,\mathbf{R}), \mathbf{R}^n, \mathscr{E}\}$如下:

$$TM=\bigcup_{p\in M}T_pM,$$

π: $TM\to M$, $\pi(T_pM)=\{p\}$, 即 $\pi(X_p)=p$, $X_p\in T_pM$. $\pi^{-1}(\{p\})=T_pM$为p点处的纤维．对于任何(U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，定义局部平凡化为 ψ: $\pi^{-1}(U)=\bigcup_{p\in U}T_pM\to U\times\mathbf{R}^n$,

$\psi(X_p)=\psi\left(\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)=(p;a^1,\cdots,a^n)$，而 $\psi|_p$: $\pi^{-1}(\{p\})=T_pM\to\{p\}\times\boldsymbol{R}^n$为同构. 由 ψ 为一一映射，故从 $U\times\boldsymbol{R}^n$ 的拓扑自然导出 $\pi^{-1}(U)$的拓扑，使 ψ 为同胚. 显然，$\tau^*=\{\pi^{-1}(U)$中的开集$|(U,\varphi)\in\mathscr{D}\}$为 TM 的拓扑基，它唯一确定了 TM 上的一个拓扑 τ. 明显地,TM 为 T_2 空间，$\pi^{-1}(U)$为其开子集，且$(\varphi,\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n})\circ\psi$: $\pi^{-1}(U)\to\varphi(U)\times\boldsymbol{R}^n$, $(\varphi,\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n})\circ\psi(X_p)=(\varphi(p);a^1,\cdots,a^n)=(x^1,\cdots,x^n;a^1,\cdots,a^n)$为同构，因而 TM 为 $2n$ 维拓扑流形.

令$\mathscr{C}'=\{(\pi^{-1}(U),\psi)\,|\,(U,\varphi)\in\mathscr{D}\}$. 如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}\in\mathscr{D}$, $(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}\in\mathscr{D}$，则当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 时有

$$(p;b^1,\cdots,b^n)=(p;b)=(p;g_{\beta\alpha}(p)a)=\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(p;a^1,\cdots,a^n)$$

$$=\psi_\beta\left(\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)=\psi_\beta\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}a^i\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p\right)=\left(p,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^1}{\partial x^i}a^i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^n}{\partial x^i}a^i\right)$$，其中

$$g_{\beta\alpha}(p)=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \cdots&&\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}\in\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R}),$$

显然，$g_{\beta\alpha}$: $U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$为 C^∞ 映射. 又因为

$$\begin{aligned}&(y^1,\cdots,y^n;b^1,\cdots,b^n)\\&=((\varphi_\beta,\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n})\circ\psi_\beta)\circ((\varphi_\alpha,\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n})\circ\psi_\alpha)^{-1}(x^1,\cdots,x^n;a^1,\cdots,a^n)\\&=\left(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\cdots,x^n);\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^1}{\partial x^i}a^i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^n}{\partial x^i}a^i\right),\end{aligned}$$

（简记为$(y;b)=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x);\ g_{\beta\alpha}(p)a)$）. 故 TM 为 $2n$ 维 C^∞ 流

形，而$\{(\pi^{-1}(U),\ (\varphi,\mathrm{Id}_{R^n})\circ\psi)\mid(U,\ \varphi)\in\mathscr{D}\}$为其微分构造的基．由$(x^1,\cdots,x^n)=\varphi\circ\pi\circ((\varphi,\mathrm{Id}_{R^n})\circ\psi)^{-1}(x^1,\cdots,x^n;\ a^1,\cdots,a^n)$和$(\varphi,\mathrm{Id}_{R^n})\circ\psi\circ((\varphi,\ \mathrm{Id}_{R^n})\circ\psi)^{-1}=\mathrm{Id}_{\varphi(U)\times R^n}$可知，$\pi$和$\psi$分别为$C^\infty$映射和$C^\infty$同胚．于是，由$\mathscr{E}'$唯一确定了$TM$的一个丛图册$\mathscr{E}$，使$\xi$或$TM$成为$M$上的一个秩$n$的$C^\infty$向量丛．

例1 设$U\subset\boldsymbol{R}^n$为通常的C^∞开子流形．取(U,φ)，$\{u^i\}\in\mathscr{D}$为整体坐标系（如通常的直角坐标系$\{x^i\}$）．令$\psi:TU=\pi^{-1}(U)\to$

$U\times\boldsymbol{R}^n$，$\psi(X_p)=\psi\left(\sum\limits_{i=1}^n a^i\dfrac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p\right)=(p;a^1,\cdots,a^n)$，$\psi$为$C^\infty$同胚，

$\psi|_p:T_pU=\pi^{-1}(\{p\})\to\{p\}\times\boldsymbol{R}^n$为线性同构．于是，$U$的切丛$TU$为秩$n$的$C^\infty$平凡向量丛．同理，凡是具有整体坐标系的$n$维$C^\infty$流形$(M,\mathscr{D})$的切丛$TM$都是秩$n$的$C^\infty$平凡向量丛．

例2 S^1的切丛TS^1为秩1的C^∞平凡向量丛．为此取S^1的C^∞微分构造的基$\mathscr{D}'=\{(U_i,\varphi_i)\mid i=1,2\}$，其中

$$U_1=\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid 0<\theta<2\pi\},\qquad \varphi_1(\cos\theta,\sin\theta)=\theta,$$

$$U_2=\{(\cos\eta,\sin\eta)\mid -\pi<\eta<\pi\},\qquad \varphi_2(\cos\eta,\sin\eta)=\eta,$$

则$\eta=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<\theta<\pi,\\ \theta-2\pi, & \pi<\theta<2\pi;\end{cases}$ $\quad\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Big|_p=\dfrac{\partial\theta}{\partial\eta}\Big|_{\varphi_2(p)}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p$

$=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p$，$p\in U_1\cap U_2$，定义$\psi:TS^1\to S^1\times\boldsymbol{R}$使得

$$\psi(X_p)=\begin{cases}(p;a),\ p\in U_1,\ X_p=a\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p,\\[2ex] (p;b),\ p\in U_2,\ X_p=b\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Big|_p,\end{cases}$$

因为$\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Big|_p=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p$，$p\in U_1\cap U_2$，故$\psi$为定义确切的一一映射，且$\psi$为$C^\infty$同胚，$\psi|_p:\pi^{-1}(p)\to\{p\}\times\boldsymbol{R}^n$为线性同构．

定义4 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形，TM为其C^∞切丛，$U\subset$

M，则称 U 上的截面 $X:U\to TM$ $(\pi|_U\circ X=\mathrm{Id}_U:U\to U$ 或对任何 $p\in U$，在映射 X 下对应于 $X_p\in T_pM)$ 为 U 上的**切向量场**；如果 X 为 C^0(即连续)截面，则称它为 **C^0(即连续)切向量场**；如果 $U\subset M$ 为开集，称 $C^k(1\leqslant k\leqslant\infty)$ 截面 X 为 **C^k 切向量场**．记 U 上的 C^k 切向量场全体为 $C^k(TU)$ 或 $C^k(TM|_U)$．

定理 2 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形，则

(1) X 为 M 上的 $C^k(0\leqslant k\leqslant\infty)$ 切向量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，$X_p=\sum\limits_{i=1}^{n}a^i(p)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$，$p\in U$，有 $a^i\in C^k(U,\mathbf{R})$．

(2) X 为 M 上的 C^∞ 切向量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 $f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，有 $Xf\in C^\infty(M,\mathbf{R})$．

证明 (1) $X:M\to TM$ 为 C^k 截面 $\Leftrightarrow$ 对任何 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，$(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\circ\psi\circ X\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\varphi(U)\times\mathbf{R}^n$，$(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\circ\psi\circ X\circ\varphi^{-1}(x)=(x;\ a^1\circ\varphi^{-1}(x),\ \cdots,\ a^n\circ\varphi^{-1}(x))$ 是 C^k 类的 $\Leftrightarrow$ 对任何 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，$a^i\in C^k(U,\mathbf{R})$．

(2) $(\Rightarrow)$ 对任何 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，在 U 中

$$Xf=\left(\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i},$$

由 $f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，$X$ 为 M 上的 C^∞ 切向量场和(1)可知 $a^i,\dfrac{\partial}{\partial x^i}f\in C^\infty(U,\mathbf{R})$，故 $Xf|_U\in C^\infty(U,\mathbf{R})$ 从而 $Xf\in C^\infty(M,\mathbf{R})$．

$(\Leftarrow)$ 对任何 $p\in M$，取 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，使 $p\in U$．由定理 1，$X=\sum\limits_{i=1}^{n}(Xx^i)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$．利用第一章 § 3 引理 1 构造 $f_i\in C^\infty(M,\mathbf{R})$ 使 $f_i|_V\equiv x^i|_V$，其中 $V\subset U$ 为 p 的开邻域．于是，

$$(Xx^i)|_V\equiv(Xf_i)|_V$$

是 C^∞ 类的，故 $X|_V$，从而 X 为 C^∞ 类的．　　#

例 3 设$\{x^i\}$为通常 C^∞ 流形 $\boldsymbol{R}^n$ 的直角坐标，由定义 4 或定理2，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\middle| i=1, \cdots, n\right\}$为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的整体 C^∞ 坐标基向量场(图18).

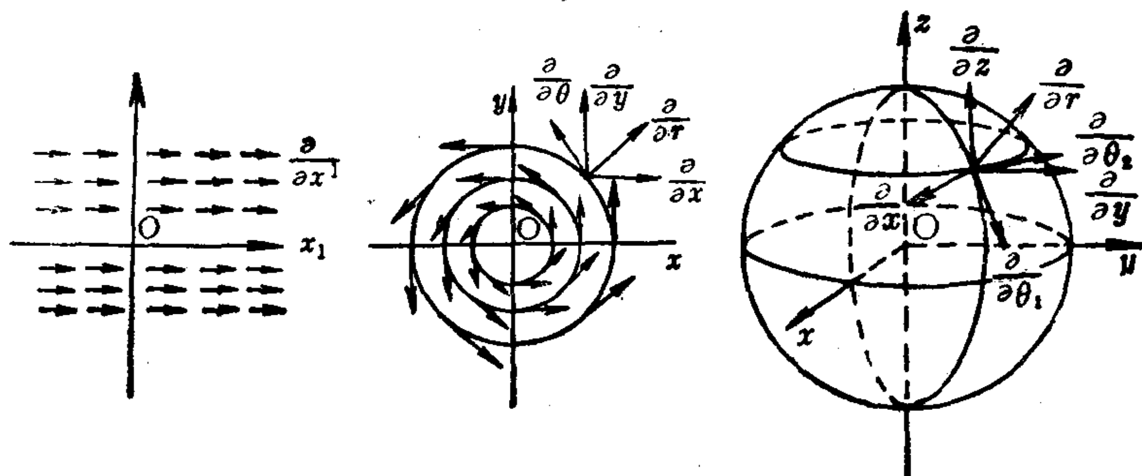


图 18

由例 2，$\frac{\partial}{\partial \theta}$为 S^1 上的整体 C^∞ 基向量场，但 θ 只是局部坐标而不是整体坐标.

设(U,φ)，$\{r,\theta\}$为 $\boldsymbol{R}^2$ 的局部(极)坐标系，$U=\boldsymbol{R}^2-\{(x,0)\mid x\geqslant 0\}$，$\varphi^{-1}:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to U$，$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，由坐标基变换公式得到

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

$\left\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$为 $\boldsymbol{R}^2$ 上的局部 C^∞ 坐标基向量场(图 18).

类似可考虑 $\boldsymbol{R}^3$ 上的局部(球)坐标系(U,φ)，$\{r,\theta_1,\theta_2\}$，$U=\boldsymbol{R}^3-(\{(x,0,0)\mid x\geqslant 0\}\cup\{(0,0,z)\mid z\in\boldsymbol{R}\})$，$\varphi^{-1}:(0,+\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)\to U$，$(x,y,z)=(r\sin\theta_1\cos\theta_2, r\sin\theta_1\sin\theta_2, r\cos\theta_1)$，由坐标基变换公式得到

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial r}\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\\ r\cos\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\sin\theta_2 & -r\sin\theta_1\\ -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & r\sin\theta_1\cos\theta_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$\left\{\dfrac{\partial}{\partial r},\dfrac{\partial}{\partial\theta_1},\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\right\}$为 $\mathbf{R}^3$ 上的局部 C^∞ 坐标基向量场(图 18).

现在我们定义一个 C^∞ 映射的微分(或 Jacobi 映射)、切映射,然后证明一些有关的性质.

定义 5 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^∞ 流形, $i=1,2$. $f:M_1\to M_2$ 为 C^∞ 映射,$p\in M_1$,$f(p)\in M_2$. 令映射

$$f_{*p}:T_pM_1\longrightarrow T_{f(p)}M_2,$$

使对任何$(h,U_h)\in C^\infty(f(p))$, 有 $f_{*p}(X_p)h=X_p(h\circ f)$,$X_p\in T_pM$. 易见 $f_{*p}(X_p)\in T_{f(p)}M_2$,且$f_{*p}$ 为线性映射,称f_{*p}为 f 在 p 点处的**微分**或 **Jacobi 映射**(也记作$(df)_p$).

特别地,在 p 的局部坐标系(U,φ),$\{x^i\}$和 $f(p)$的局部坐标系(V,ψ),$\{y^j\}$里,有

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)h=\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p(h\circ f)=\frac{\partial(h\circ f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial(h\circ\psi^{-1})}{\partial y^j}\bigg|_{\psi(f(p))}\cdot\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}=\left(\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{f(p)}\right)h,$$

其中 $y=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x)$. 于是,

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)=\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{f(p)},$$

$$\begin{pmatrix}f_{*p}\dfrac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p\\ \vdots\\ f_{*p}\dfrac{\partial}{\partial x^{n_1}}\bigg|_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1}\cdots\dfrac{\partial y^{n_2}}{\partial x^1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^{n_1}}\cdots\dfrac{\partial y^{n_2}}{\partial x^{n_1}}\end{pmatrix}_{\varphi(p)}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial y^{n_2}}\end{pmatrix}_{f(p)}.$$

我们称$\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$为$f_{*p}$关于局部坐标系$\{x^i\}$, $\{y^j\}$的**Jacobi 矩阵**.

设 $X_p=\sum_{i=1}^{n_1}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $f_{*p}(X_p)=\sum_{j=1}^{n_2}b^j\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{f(p)}$,

则

$$\sum_{j=1}^{n_2}b^j\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{f(p)}=f_{*p}(X_p)=\sum_{i=1}^{n_1}a^if_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}a^i\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\cdot\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p=\sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}a^i\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{f(p)},$$

$$b^j=\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}a^i,$$

$$\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^{n_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^1}{\partial x^{n_1}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial y^{n_2}}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^{n_2}}{\partial x^{n_1}}\end{pmatrix}_{\varphi(p)}\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^{n_1}\end{pmatrix}.$$

定理 3 设M,N,L分别为m,n,l维C^∞流形. 则

(1) $(\mathrm{Id}_M)_{*p}=\mathrm{Id}_{T_pM}$;

(2) 若$f:M\to N$和$g:N\to L$为C^∞映射,则

$$(g\circ f)_{*p}=g_{*f(p)}\circ f_{*p}.$$

(3) $f:M\to N$为C^∞浸入$\Longleftrightarrow f:M\to N$为$C^\infty$映射,且对任何$p\in M$, $f_{*p}:T_pM\to T_{f(p)}N$ 为单同态(单射且为同态),因而$f_{*p}:T_pM\to f_{*p}(T_pM)\subset T_{f(p)}N$为同构.

(4) 若$f:M\to N$为C^∞同胚,则$f_{*p}:T_pM\to T_{f(p)}N$为同构.

证明 (1) 对任何$(h,U_h)\in C^\infty(p)=C^\infty(\mathrm{Id}_M(p))$, 任何$X_p\in T_pM$,因$(\mathrm{Id}_M)_{*p}(X_p)h=X_p(h\circ\mathrm{Id}_M)=X_ph=\mathrm{Id}_{T_pM}(X_p)h$,故

$$(\mathrm{Id}_M)_{*p}=\mathrm{Id}_{T_pM}.$$

(2) 对任何 $(h, U_h)\in C^\infty(g\circ f(p))$, 任何 $X_p\in T_pM$, 因 $(g\circ f)_{*p}(X_p)h=X_p(h\circ(g\circ f))=X_p((h\circ g)\circ f)=f_{*p}(X_p)(h\circ g)=\{g_{*f(p)}\circ f_{*p}(X_p)\}h$, 故 $(g\circ f)_{*p}=g_{*f(p)}\circ f_{*p}$.

(3) f 为 C^∞ 浸入,即 f 为 C^∞ 映射,且对任何 $p\in M$, $(\text{rank}f)_p=m$. 而在局部坐标系中, $(\text{rank}f)_p=m\Leftrightarrow \text{rank}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi(p)}=m\Leftrightarrow f_{*p}$ 为单同态.

(4) 由(1)(2), 因为 f, f^{-1} 为 C^∞ 映射, 故 $\text{Id}_{T_pM}=(\text{Id}_M)_{*p}=(f^{-1}\circ f)_{*p}=(f^{-1})_{*f(p)}\circ f_{*p}$. 同理 $f_{*p}\circ(f^{-1})_{*f(p)}=\text{Id}_{T_{f(p)}N}$. 于是 $f_{*p}:T_pM\to T_{f(p)}N$ 为同构. #

定义 6 设 $(M, \mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形, $W\subset R^1$ 为开集, 则称 C^r 映射 (不是映射的象集) $\sigma: W\to M$ 为 M 中的一条 **C^r 曲线**. 如果 $\sigma:[a,b]\to M$ 可延拓到含 $[a,b]$ 的开集 W 上使得 $\tilde{\sigma}: W\to M$ 为 C^r 曲线, 且 $\tilde{\sigma}|_{[a,b]}=\sigma$, 我们也称 σ 为 C^r 曲线. 有时仍记 $\tilde{\sigma}$ 为 σ.

设 $\sigma:(a,b)\to M$ 为 C^∞ 曲线, (U,φ), $\{x^1,\cdots,x^n\}$ 为含 $\{\sigma(t)|t\in(a,b)\}$ 的局部坐标系(t 称为曲线 σ 的参数,注意: 允许 $t_1\neq t_2$, 而 $\sigma(t_1)=\sigma(t_2)$!). 对每个 $t\in(a,b)$, 确定了一个沿 σ 的切向量(图 19)

$$\sigma'(t)=\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\bigg|_t\right)=\sum_{i=1}^n\frac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\sigma(t)},$$

称 $\sigma'(t)$ 或 $\frac{d\sigma(t)}{dt}$ 在 $\sigma(t)$ 切于 σ, σ' 为沿 σ 的切向量场.

特别,对坐标曲线 σ_i, 即 $\varphi\circ\sigma_i(x^i)=(x_0^1,\cdots,x_0^{i-1},x^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)$, x^i 为参数,则沿 σ_i 的切向量场按上述公式应是 $\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\sigma_i(x^i)}$, 它是第 i 个坐标向量场限制在 σ_i 的象集上的值(图 20).

现在, 我们可以给出 C^∞ 映射 $f:M_1\to M_2$ 的微分 f_* 的几何直

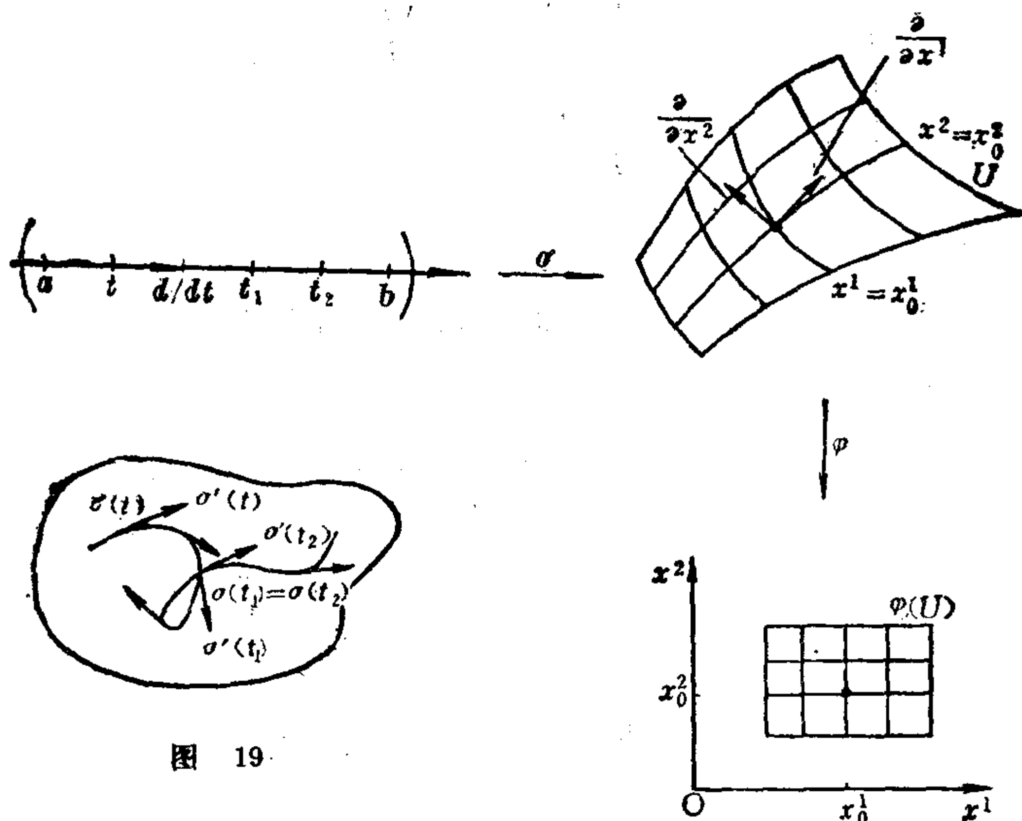


图 19

图 20

观. 设 σ 为 M_1 上的一条 C^∞ 曲线, 则 $f\circ\sigma$ 为 M_2 上的一条 C^∞ 曲线, 且

$$(f\circ\sigma)'(t)=(f\circ\sigma)_*\left(\frac{d}{dt}\right)=f_*\circ\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)=f_*(\sigma'(t)),$$

即 σ 的切向量 $\sigma'(t)$ 经 f_* 变为 $f\circ\sigma$ 的切向量 $(f\circ\sigma)'(t)$.

例 4 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^∞ 流形, M_1 为 M_2 的 C^∞ 正则子流形. 对 $p\in M_1$, 选 p 关于 M_2 的局部坐标系 $\{x^i\mid i=1,\cdots,n_2\}$, (U,φ), 使 $\{x^i\mid i=1,\cdots,n_1\}$ 为 p 关于 M_1 的局部坐标系, 且 $M_1\cap U=\{q\in U\mid x^j(q)=0,\ n_1+1\leqslant j\leqslant n_2\}$. 令 $I:M_1\to M_2$ 为包含映射, 则

$$I_{*p}:T_pM_1\longrightarrow I_{*p}(T_pM_1)\subset T_{I(p)}M_2$$

为同构, 且

$$\begin{pmatrix} I_{*p}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p^*\right) \\ \vdots \\ I_{*p}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^{n_1}}\bigg|_p^*\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{x^1}\bigg|_{I(p)} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x^{n_2}}\bigg|_{I(p)} \end{pmatrix},$$

所以，$I_{*p}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p^*\right)=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{I(p)}$，$i=1,\cdots,n_1$，$I_{*p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p^*\right)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n_1}a^iI_{*p}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p^*\right)=\sum\limits_{i=1}^{n_1}a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{I(p)}$. 由此，我们将$\sum\limits_{i=1}^{n_1}a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p^*$

与$\sum\limits_{i=1}^{n_1}a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$不加区别地视作相同的向量.

如果 σ 为 M_1 上的 C^∞ 曲线，则 $I\circ\sigma$ 为 M_2 上的 C^∞ 曲线. 于是，

$$(I\circ\sigma)'(t)=I_*(\sigma'(t)).$$

例 5 设 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 为 C^∞ 函数，$\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x^n}\right)=1$，则 $f(x^1,\cdots,x^n)=0$ 确定了 $M=f^{-1}(0)$ 或为空集或为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形.

如果 $M=f^{-1}(0)$ 非空. 设 σ 为 $M=f^{-1}(0)$ 上的 C^∞ 曲线，沿 $I\circ\sigma$ 的切向量场 $(I\circ\sigma)'(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{d(x^i\circ I\circ\sigma)}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{I\circ\sigma(t)}$. 将关于 t 的恒等式 $f(x^1(I\circ\sigma(t)),\cdots,x^n(I\circ\sigma(t)))\equiv 0$ 的两边对 t 求导得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\frac{d(x^i\circ I\circ\sigma)}{dt}=0,$$

即 $M=f^{-1}(0)$ 上的切向量与法向量$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{I\circ\sigma(t)}$ 正交.

定理 4 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为n_i维C^∞流形，$i=1,2$. $f:M_1\to M_2$为C^∞映射. 令切映射$\tilde{f}:TM_1\to TM_2$，使$\tilde{f}|_{T_pM_1}=f_{*p}$，$p\in M_1$，则$(\tilde{f},f)$为$C^\infty$丛映射，因而图表

$$\begin{array}{ccc} TM_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & TM_2 \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

是可交换的，即$f\circ\pi_1=\pi_2\circ\tilde{f}$，其中 $\pi_i:TM_i\to M_i$ 为丛投影，$i=1,2$.

如果f为C^∞同胚，则$(\tilde{f},f)$为丛等价.

证明 对任何$X_p\in T_pM$，分别取p和$f(p)$的局部坐标系(U,φ_U)，$\{x^i\}$和(V,φ_V)，$\{y^j\}$，使$f(U)\subset V$. 相应的切丛的丛图卡为$(\pi_1^{-1}(U),(\varphi_U,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\psi_U)$和$(\pi_2^{-1}(V),(\varphi_V,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\psi_V)$使$\tilde{f}(\pi_1^{-1}(U))\subset\pi_2^{-1}(V)$，且由定义 5 中的公式得到

$$\psi_V\circ\tilde{f}\circ\psi_U^{-1}(x;a)=(\varphi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}(x),D(\varphi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1})(x)a)=(y;b).$$

于是，从$f\in C^\infty(M_1,M_2)$推出$\tilde{f}\in C^\infty(TM_1,TM_2)$.

图表可交换是显然的.

如果f为C^∞同胚，在§2定义 4 丛等价定义中的$g=f^{-1}$. 由定理 3 (2)，$\tilde{g}|_{f(p)}=\tilde{f}^{-1}|_{f(p)}=(f^{-1})_{*f(p)}=f_{*p}^{-1}=\tilde{f}|_p^{-1}$，故$(\tilde{f},f)$为丛等价. #

定理 5 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为n维C^∞流形，$i=1,2$. $f:M_1\to M_2$为C^∞同胚，X为M_1上的C^∞切向量场. 则$f_*X=\tilde{f}\circ X\circ f^{-1}:M_2\to TM_2$(若$q=f(p)$，则$\tilde{f}\circ X\circ f^{-1}(q)=f_{*p}(X_p)$)为$M_2$上的$C^\infty$切向量场.

证明 由定理 4，$f\circ\pi_1=\pi_2\circ\tilde{f}$可得到

$$\pi_2\circ(f_*X)=\pi_2\circ(\tilde{f}\circ X\circ f^{-1})=f\circ(\pi_1\circ X)\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_{M_2}.$$

又因为f^{-1}，X和$\tilde{f}$都是C^∞映射，因而f_*X也是C^∞映射. 这就

证明了 f_*X 为切丛 TM_2 上的 C^∞ 截面或 M_2 上的 C^∞ 切向量场.

另一证明如下：由 f 为一一映射和 X 为 M_1 上的切向量场，故 $f_*X((f_*X)_{f(p)}=f_{*p}(X_p))$ 为 M_2 上的切向量场. 对任何 $h\in C^\infty(M_2, \mathbf{R})$，因 $f\in C^\infty(M_1, M_2)$，故 $h\circ f\in C^\infty(M_1, \mathbf{R})$. 根据定理 2(2)和 X 为 M_1 上的 C^∞ 切向量场可知 $X(h\circ f)\in C^\infty(M_1, \mathbf{R})$，而 $(f_*X)h(f(p))=X(h\circ f)(p)$，于是 $(f_*X)h\in C^\infty(M_2, \mathbf{R})$，$f_*X$ 为 M_2 上的 C^∞ 切向量场. #

例 6 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$，$u=f(x,y)=x$ 为 C^∞ 映射. $X=y\frac{\partial}{\partial x}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的 C^∞ 切向量场. $p=(0,0)$，$q=(0,1)$，$f(p)=0=f(q)$，但 $f_{*q}(X_q)=f_{*q}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\neq 0=f_{*p}(X_p)$，因而 f_*X 不是 $\mathbf{R}^1$ 上的切向量场.

C^∞Lie 群上有一些特殊的 C^∞ 切向量场，称为左(或右)不变向量场，它们完全由单位元素处的值唯一决定.

定义 7 设 G 为 n 维 C^∞Lie 群，$a\in G$. 我们称 $L_a:G\to G, x\mapsto L_a(x)=a\cdot x$ 和 $R_a:G\to G, x\mapsto R_a(x)=x\cdot a$ 为 G 的**左移**和**右移**.

由 § 1 定义 3，L_a(或 R_a)：$G\to G$ 为 C^∞ 同胚，且 $L_a^{-1}=L_{a^{-1}}$. 对任意 $a, b\in G$，左移 $L_{ba^{-1}}$ 将 a 映成 b. 因此，$\{L_a|a\in G\}$ 为可迁作用在 C^∞Lie 群 G 上的变换群，即 G 在变换群 $\{L_a|a\in G\}$ 下为齐性空间. 于是，从局部微分性质来看具有均匀性：在一点附近成立的某种性质，在每一点附近也成立.

定义 8 设 X 为 n 维 C^∞Lie 群 G 上的切向量场，如果对任何 $a, b\in G$ 有 $(L_{ba^{-1}})_{*a}X_a=X_b$，则称 X 为**左不变向量场**. 类似可定义**右不变向量场**.

定理 6 (1) X 为 n 维 C^∞Lie 群 G 上的左不变向量场 $\Leftrightarrow$(2) 对任何 $a\in G$，$X_a=(L_a)_{*e}X_e$，即 X 由 X_e 完全确定 $\Leftrightarrow$(3) 对任何 $a\in G$，$X=(L_a)_*X$.

此外，左不变向量场 X 为 C^∞ 向量场.

证明 (1)⇒(3) 对任何 $a,b\in G$，因 X 为左不变向量场，故

$$((L_a)_*X)_b=(L_a)_{*a^{-1}b}X_{a^{-1}b}=(L_{b(a^{-1}b)^{-1}})_{*a^{-1}b}X_{a^{-1}b}$$

$$=X_b,\ (L_a)_*X=X.$$

(3)⇒(2) 对任何 $a\in G$，因 $(L_a)_*X=X$，所以

$$X_a=((L_a)_*X)_a=(L_a)_{*e}X_e.$$

(2)⇒(1) 对任何 $a,b\in G$，因 $X_a=(L_a)_{*e}X_e$，故

$$(L_{ba^{-1}})_{*a}X_a=(L_{ba^{-1}})_{*a}((L_a)_{*e}X_e)=(L_{ba^{-1}a})_{*e}X_e$$

$=(L_b)_{*e}X_e=X_b$，即 X 为左不变向量场.

再证 X 为 C^∞ 切向量场. 显然，只须证明 X 在单位元素 e 的附近是 C^∞ 即可. 为此，在点 e 的一个开邻域 W 中取一局部坐标系 $\{w^i\}$. 由于 $e\cdot e=e$，故可取 e 的两个开邻域 U 和 V，它们相应的局部坐标系为 $\{u^i\}$ 和 $\{v^j\}$，并且对任意 $u\in U$, $v\in V$ 有 $u\cdot v\in W$，其中 $w^i=g_i(u^1,\cdots,u^n;v^1,\cdots,v^n)$ 是关于 $\{u^i\}$ 和 $\{v^j\}$ 的 C^∞ 函数. 设 e 的局部坐标为 $(e^1,\ \cdots,\ e^n)$，则对任意 $u\in U$， 左移 L_u 在 $v=e$ 的 Jacobi 方阵

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial v^j}(u^1,\cdots,u^n;e^1,\cdots,e^n)\right)$$

中的每个元素都是 $\{u^i\}$ 的 C^∞ 函数，则 $X_u=(L_u)_{*e}(X_e)$ 为 $\{u^i\}$ 的 C^∞ 切向量场. #

定理 7 设 G 为 n 维 C^∞ Lie 群，$\{(X_i)_e\mid i=1,\cdots,n\}$ 为 T_eG 的一个基，$\{X_i\mid (X_i)_a=(L_a)_{*e}(X_i)_e,\ a\in G,\ i=1,\cdots,n\}$ 为 G 上的整体的 C^∞ 基向量场.

证明 对任何 $a\in G$，若 $0=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(X_i)_a$，则 $0=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(X_i)a$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(L_a)_{*e}(X_i)_e=(L_a)_{*e}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(X_i)_e\right)$. 由 $(L_a)_{*e}$ 为同

构可知$0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(X_i)e$. 再由$\{(X_i)_e|i=1,\cdots,n\}$为$T_eG$的基，有$\lambda_i=0, i=1,\cdots,n$. 这就证明了$\{(X_i)_a|i=1,\cdots,n\}$是线性无关的，从而它是$T_aG$的基. 切向量场的$C^\infty$性由定理6得到. #

定义 9 如果n维C^∞流形$(M,\mathscr{D})$上具有整体的C^∞基向量场$\{X_i|i=1,\cdots,n\}$，则称$(M,\mathscr{D})$为**可平行的**.

定理 8 (1) 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形，则$(M,\mathscr{D})$可平行$\Leftrightarrow$ TM是平凡向量丛.

(2) C^∞Lie群G是可平行的，TG是平凡向量丛.

证明 (1) ($\Leftarrow$) 设TM为平凡向量丛，故存在丛图卡(TM,ψ)，使$\psi: TM=\pi^{-1}(M)\to M\times\boldsymbol{R}^n$为$C^\infty$同胚，$\psi|_p:\pi^{-1}(\{p\})=T_pM\to\{p\}\times\boldsymbol{R}^n$为同构. 易见$\{X_i|X_i|_p=\psi^{-1}(p,e_i), i=1,\cdots,n\}$为$M$上的$C^\infty$基向量场，因而$(M,\mathscr{D})$是可平行的.

($\Rightarrow$) 设$(M,\mathscr{D})$是可平行的，$\{X_i|i=1,\cdots,n\}$为M上的C^∞基向量场，定义

$$TM=\pi^{-1}(M)\xrightarrow{\psi}M\times\boldsymbol{R}^n,$$

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}a^iX_i|_p\mapsto\psi(X_p)=(p;a^1,\cdots,a^n)$$

显然，ψ为一一映射，$\psi|_p:\pi^{-1}(\{p\})\to\{p\}\times\boldsymbol{R}^n$为同构.

对任何$p_0\in M$，在p_0的局部坐标系(V,φ)，$\{x^i\}$中，

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}a^i\sum_{j=1}^{n}c_i^j(p)\frac{\partial}{\partial X^j}\bigg|_p=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^j(p)a^i\right)\frac{\partial}{\partial X^j}\bigg|_p$$

$$=\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial X^j}\bigg|_p,\quad p\in V$$

设$C(p)=(c_i^j(p))$，则ψ^{-1}在此局部坐标系中为$(x;a)\mapsto(x;b)=(x;C(p)a)$，它是$C^\infty$映射. 而$\psi$在此局部坐标系中为$(x;b)\mapsto$

$(x;a)=(x;C(p)^{-1}b)$，它也是 C^∞ 的．由 p_0 的任意性，ψ 和 ψ^{-1} 是 C^∞ 的，于是 ψ 为 C^∞ 同胚．由此推出 TM 为平凡向量丛．

(2) 由定理 7，C^∞Lie 群 G 是可平行的，再由(1)，TG 是平凡向量丛．　#

例 7　由第四章§2 例 5 可知，S^{2m} 上无处处非 0 的C^∞ 切向量场．更进一步，由[P. J. 希尔顿和 S. 瓦理，255 页，定理 5.8.6]，S^{2m} 上无处处非 0 的连续切向量场，根据定理8，TS^{2m} 不是C^∞平凡向量丛，当然 S^{2m} 也不是 C^∞Lie 群(如果用坐标观点定义切向量，这里可理解TS^{2m} 不是 $C^r(r\geqslant 1)$平凡向量丛，S^{2m}不是C^rLie群)．

在 S^{2m-1} 上有处处非 0 的 C^∞ 切向量场 $X|_x=(x_2,-x_1,x_4,-x_3,\cdots,x_{2m},-x_{2m-1})$，$x\in S^{2m-1}$．自然要问$S^{2m-1}$是否可平行？它是否可成为 Lie 群？[Adams, J. F., 1960]证明了一个重要结果：TS^n 为平凡向量丛$\Longleftrightarrow n=1,3,7$．而由§2例 2，例 3 知 S^1，S^3为C^∞Lie 群，当然 TS^1，TS^3 为平凡向量丛．

现在，我们来具体构造 S^1，S^3 上左不变 C^∞ 基向量场．

$\frac{\partial}{\partial\theta}$和 $X|_x=(-x^2,\ x^1)$ 为 S^1 上整体 C^∞ 基向量场．设 $S^1=\{x=x^1+ix^2\in\mathbf{C}\mid(x^1)^2+(x^2)^2=1\}$，$X_e=\sigma'(0)=i$，由 $X|_x=(L_x)_*X_e=(L_x)_*\sigma'(0)=\left.\frac{d(L_x\sigma(t))}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d(x\cdot\sigma(t))}{dt}\right|_{t=0}=x\sigma'(0)=xi=-x^2+ix^1$，故 X 为 S^1 上的左不变向量场．

设

$$\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\\e_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^1 & x^2 & x^3 & x^4\\-x^2 & x^1 & x^4 & -x^3\\-x^3 & -x^4 & x^1 & x^2\\-x^4 & x^3 & -x^2 & x^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\\frac{\partial}{\partial x^2}\\\frac{\partial}{\partial x^3}\\\frac{\partial}{\partial x^4}\end{pmatrix},$$

显然，在 S^3 上，$\{e_i \mid i=1,2,3,4\}$ 为 $\mathbf{R}^4$ 的 C^∞ 规范正交基向量场，其中 e_1 为 S^3 上的 C^∞ 单位法向量场，而 $\{e_i \mid i=2,3,4\}$ 为 S^3 上的 C^∞ 规范正交的整体基切向量场．设 $S^3=\{x=x^1+\boldsymbol{i}x^2+\boldsymbol{j}x^3+\boldsymbol{k}x^4 \in H$ (四元数广域) $\mid (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=1\}$，类似于 S^1，$x\boldsymbol{i}, x\boldsymbol{j}, x\boldsymbol{k}$ 为 S^3 上的左不变 C^∞ 基切向量场．

对于 S^7，类似可验证

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 \\ -x^2 & x^1 & -x^4 & x^3 & -x^6 & x^5 & x^8 & -x^7 \\ -x^3 & x^4 & x^1 & -x^2 & -x^7 & -x^8 & x^5 & x^6 \\ -x^4 & -x^3 & x^2 & x^1 & -x^8 & x^7 & -x^6 & x^5 \\ -x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & x^1 & -x^2 & -x^3 & -x^4 \\ -x^6 & -x^5 & x^8 & -x^7 & x^2 & x^1 & x^4 & -x^3 \\ -x^7 & -x^8 & -x^5 & x^6 & x^3 & -x^4 & x^1 & x^2 \\ -x^8 & x^7 & -x^6 & -x^5 & x^4 & x^3 & -x^2 & x^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x^5} \\ \frac{\partial}{\partial x^6} \\ \frac{\partial}{\partial x^7} \\ \frac{\partial}{\partial x^8} \end{pmatrix}$$

为 $\mathbf{R}^8$ 的 C^∞ 规范正交基向量场，其中 e_1 为 S^7 上的 C^∞ 单位法向量场，而 $\{e_i \mid i=2,\cdots,8\}$ 为 S^7 上的 C^∞ 规范正交的整体基切向量场，故 S^7 是可平行的，从而 TS^7 为平凡向量丛．但[徐森林和周坚]证明了：S^7 不是 C^ω Lie 群．更进一步，S^n 为 C^ω Lie 群(或拓扑群) $\Longleftrightarrow n=0,1,3$．类似地，[Xu Senlin and Zhou Jian]还证明了：$P^n(\mathbf{R})$ $(n\geqslant 1)$ 可平行 $\Longleftrightarrow n=1,3,7$ 以及 $P^n(\mathbf{R})$ 为 C^ω Lie 群(或拓扑群) $\Longleftrightarrow n=0,1,3$.

例 8 切丛为平凡向量丛但不是 Lie 群的非连通的例子是容易举出的. 例如, $M=\{(x,0)\mid x\in \boldsymbol{R}\}\cup\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=1\}$, 则

$$X|_p=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}, & p=(x,0),\\ -(y-2)\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}, & p=(x,y),x^2+(y-2)^2=1,\end{cases}$$

为 M 上的整体 C^∞ 基向量场, 故 M 可平行或 TM 为平凡向量丛. 如果 M 为拓扑群, $e\in M$ 为单位元素, 不妨设 $e\in\{(x,0)\mid x\in \boldsymbol{R}\}$, 任取 $a\in\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=1\}$, 则由 $L_a e=a\cdot e=a$, 又因 $L_a: M\to M$ 为同胚, 故将连通分支变为连通分支, 于是 $L_a(\{(x,0)\mid x\in \boldsymbol{R}\})=\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=1\}$, 这就推出了同胚下将非紧致集变成紧致集, 矛盾. 所以 M 不是拓扑群, 更不是 Lie 群.

§4 C^∞ 切向量场和积分曲线

定义 1 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形, $U\subset M$ 为开集, X 为 U 上的 C^∞ 切向量场, $\sigma:(a,b)\to M$ 为 C^∞ 曲线, $\sigma((a,b))\subset M$, 且 $\sigma'(t)=X_{\sigma(t)}$, $t\in(a,b)$, 则称 σ 为 X 的 C^∞ **积分曲线**或**流线**.

定理 1 (积分曲线的局部存在性定理) 设 X 为 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的某开集上的 C^∞ 切向量场, p 为 X 的定义域中的一点, 则对任何 $b\in \boldsymbol{R}$, 存在 $\varepsilon>0$ 和唯一的 C^∞ 曲线 $\sigma:(b-\varepsilon,b+\varepsilon)\to M$, 使得 $\sigma(b)=p$ 和 σ 为 X 的 C^∞ 积分曲线(图 21).

此外, σC^∞ 依赖于初始值 b 和点 p.

证明 设 (U,φ), $\{x^i\}$ 为 p 的局部坐标系, U 包含在 X 的定义域中. 令

$$X=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则由 X 为 C^∞ 切向量场可知 $a^i\in C^\infty(U,\boldsymbol{R})$.

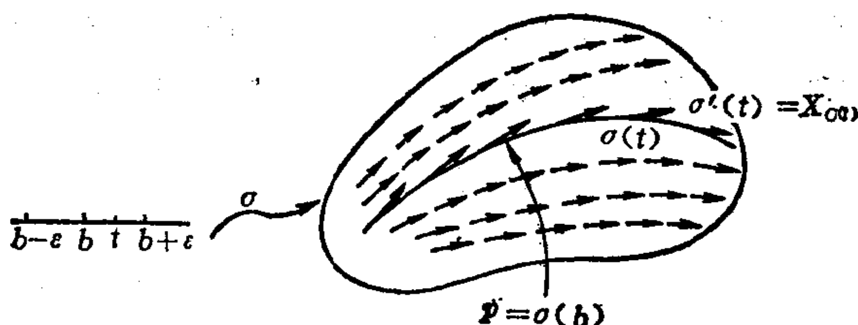


图 21

σ 为过 p 的 C^∞ 积分曲线 $\Longleftrightarrow \dfrac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}=a^i\circ\sigma$, $x^i\circ\sigma(b)=x^i(p)$, $i=1,\cdots,n$, 即 $\dfrac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}=a^i(x^1\circ\sigma,\cdots,x^n\circ\sigma)$. 应用常微分方程的存在和唯一性定理，存在 $\varepsilon>0$ 和 $x^i\circ\sigma(t,b,p)$，使它所确定的 C^∞ 曲线 σ 在指定的范围内满足所要求的性质.

从常微分方程定理进一步知道，此解 C^∞ 依赖于初始值 b 和点 p. #

定义 2 如果 C^∞ 映射 $h:\boldsymbol{R}^1\times M\to M$, $h(t,p)=h_t(p)$ 满足:

(1) $h_{t+s}=h_t\circ h_s$, $t,s\in\boldsymbol{R}^1$;

(2) $h_0=\mathrm{Id}_M$,

则显然有 $h_t\circ h_{-t}=h_{t+(-t)}=h_0=\mathrm{Id}_M$, 同理 $h_{-t}\circ h_t=\mathrm{Id}_M$, 故 $h_t^{-1}=h_{-t}$, 于是 $h_t:M\to M$ 为 C^∞ 同胚或 C^∞ 变换. 则称 $h_t:M\to M$ 为 M 上的 C^∞ 变换的 **1参数群**.

$\boldsymbol{R}^1$ 作为 C^∞Lie 群(关于加法)左方 C^∞ 作用在 M 上.

固定 $p\in M$, 则 $t\mapsto h_t(p)$ 为一条通过 p 的 C^∞ 曲线，称为 p 的**轨道**. 我们定义

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i(h_t(p))}{dt}\bigg|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

(易见它与 p 的局部坐标系的选取无关). 因为 h 为 C^∞ 映射，故映射 $p\mapsto x_p$ 定义了 M 上的一个 C^∞ 切向量场，称为 1 参数群 h_t 的

无穷小变换.

定理 2 (1) $\{h_t(q)\mid t\in\mathbf{R}^1\}=\{h_t(p)\mid t\in\mathbf{R}^1\}\Longleftrightarrow q\in\{h_t(p)\mid t\in\mathbf{R}^1\}$. 因此, M 划分为彼此不相交的形如$\{h_t(p)\mid t\in\mathbf{R}^1\}$的 C^∞ 曲线.

(2) $X_{h_t(p)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{dx^i(h_t(p))}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{h_t(p)}=\dfrac{dh_t(p)}{dt}$, 且

$(h_s)_*(X_{h_t(p)})=X_{h_{s+t}(p)}$.

证明 (1) ($\Longrightarrow$) 若 $\{h_t(q)\mid t\in\mathbf{R}^1\}=\{h_t(p)\mid t\in\mathbf{R}^1\}$, 则 $q=h_0(q)\in\{h_t(p)\mid t\in\mathbf{R}\}$.

($\Longleftarrow$) 若$q\in\{h_t(p)\mid t\in\mathbf{R}^1\}$, 令 $q=h_{t_0}(p)$, 则 $h_t(q)=h_t(h_{t_0}(p))=h_{t+t_0}(p)$, 故$\{h_t(q)\mid t\in\mathbf{R}^1\}\subset\{h_t(p)\mid t\in\mathbf{R}^1\}$. 又因 $p=h_{t_0}^{-1}(q)=h_{-t_0}(q)$,同理可得$\{h_t(q)\mid t\in\mathbf{R}^1\}\supset\{h_t(p)\mid t\in\mathbf{R}^1\}$.于是,$\{h_t(q)\mid t\in\mathbf{R}^1\}=\{h_t(p)\mid t\in R^1\}$.

$$
\begin{aligned}
(2)\quad X_{h_t(p)}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i(h_s(h_t(p)))}{ds}\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{h_t(p)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i(h_{s+t}(p))}{ds}\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{h_t(p)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i(h_t(p))}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{h_t(p)}=\frac{dh_t(p)}{dt}.
\end{aligned}
$$

因为 $h_s(h_t(p))=h_{s+t}(p)$, 且 h_s 为 C^∞ 同胚, 故$(h_s)_*(X_{h_t(p)})=(h_s)_*\left(\dfrac{dh_t(p)}{dt}\right)=\dfrac{dh_{s+t}(p)}{dt}=X_{h_{s+t}(p)}$. #

例 1 $M=(0,1)$, $X=\dfrac{\partial}{\partial x}$, 则过 x 的积分曲线为 $h_t(x)=t+x, x\in(0,1), t+x\in(0,1)$. 于是 C^∞ 切向量场$\dfrac{\partial}{\partial x}$不产生 $(0,1)$ 上的 C^∞ 变换的整体 1 参数群.

再如 $M=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $X=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$,由定理 1 或定理 2(2),

$$h_t(x)=\begin{cases}\sqrt{2t+x^2}, & x\in(0,+\infty),\\ -\sqrt{2t+x^2}, & x\in(-\infty,0),\end{cases}$$

而 $2t+x^2\geqslant 0$,所以 C^∞ 切向量场 $\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ 不产生$(0, 1)$上的 C^∞ 变换的整体 1 参数群.

例 1 说明 M 上的每个 C^∞ 切向量场不一定产生 M 上的 C^∞ 变换的 1 参数群. 但是,局部地它是正确的.

定义 3 如果 C^∞ 映射 h: $(-\varepsilon, \varepsilon)\times V\to M$, $h(t,p)=h_t(p)$ (V 为 C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$的开集)满足:

(1) $h_t:V\to h_t(V)$为 C^∞ 同胚, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$;

(2) $h_0=\mathrm{Id}_V$;

(3) $t,s,t+s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, p, $h_s(p)\in V\Rightarrow h_{t+s}(p)=h_t\cdot h_s(p)$. 则称 C^∞ 局部变换 $h_t:V\to M$为**局部 1 参数群**.

定理 3 (局部 1 参数群的存在性) 设 X 为 n 维 C^∞ 流形$(M, \mathscr{D})$的 C^∞ 切向量场, $p_0\in M$. 则存在 p_0 的一个开邻域 V 和 $\varepsilon>0$,使得对任何 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$有一个 C^∞ 局部变换 $h_t:V\to M$,且成为局部 1 参数群,它诱导出已给的切向量场 X.

如果 $\tilde{h}_t$ 为$(-\varepsilon, \varepsilon)\times V$ 上的诱导出X的另一个 C^∞ 局部变换的 1 参数群,则 $\tilde{h}_t=h_t$(唯一性).

证明 设(U,φ), $\{x^i\}$为p_0的局部坐标系,不妨设$x^1(p_0)=\cdots=x^n(p_0)=0$. 在 U 中令

$$X=\sum_{i=1}^{n}a^i(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

考虑常微分方程:

$$\frac{dh^i}{dt}=a^i(h^1(t),\cdots,h^n(t)),\ i=1,\cdots,n,$$

其中 $h^1(t),\cdots,h^n(t)$ 为未知函数，由常微分方程的基本定理，存在唯一的 C^∞ 函数组

$$h^1(t;x),\ \cdots,\ h^n(t;x),\quad |t|<\varepsilon_1,\quad x=(x^1,\cdots,x^n),\quad |x^j|<\delta_1,$$

它们对每个固定的 x 形成了微分方程的解，且满足初始条件：$h^i(0;x)=x^i$. 令

$$h_t(x)=(h^1(t;x),\cdots,h^n(t;x)),\ |t|<\varepsilon_1,x\in V_1=\{x\,\big|\,|x^j|<\delta_1\}.$$

如果 $|t|,|s|,|t+s|<\varepsilon_1$ 和 $x,h_s(x)\in V_1$，则

$$g^i(t)=h^i(t+s;x)$$

为满足初始条件 $g^i(0)=h^i(s;x)$ 的微分方程的解. 由解的唯一性定理，必须 $g^i(t)=h^i(t;h_s(x))$. 这就证明了 $h_{t+s}(x)=h_t(h_s(x))=h_t\circ h_s(x)$.

由 $h^i(0;x)=x^i,i=1,\cdots,n,h_0(x)=(h^1(0;x),\cdots,h^n(0;x))=x$，即 $h_0=\mathrm{Id}_{V_1}$. 则存在 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$ 使得当 $|t|<\varepsilon$ 时，对于

$$V=\{x\,|\,|x^i|<\delta\}\ 有\ h_t(V)\subset V.$$

因此，$h_{-t}\circ h_t(x)=h_t\circ h_{-t}(x)=h_0(x)=x$, $|t|<\varepsilon$, $x\in V$. 这就推出了当 $|t|<\varepsilon$ 时，$h_t:V\to h_t(V)$ 为 C^∞ 同胚. 所以，h_t 为定义在 $(-\varepsilon,\ \varepsilon)\times V$ 上的局部变换的局部1参数群. 从 h_t 的构造，显然它在 V 上诱导出已给的切向量场 X.

由上述证明和常微分方程解的唯一性定理可知 $\bar{h}=h$ 或 $\bar{h}_t=h_t,t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. #

定义 4 设 X 为 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上的 C^∞ 切向量场. 如果存在 M 上的 C^∞ 变换的整体1参数群 h_t（参看定义 2），它诱导出 X，则称 X 为**完备的** C^∞ 切向量场.

定理 4 设 K 为 n 维 C^∞ 流形 $(M,\ \mathscr{D})$ 的紧致子集，X 为 M 上的 C^∞ 切向量场，且 $X|_{M-K}=0$，则 X 是完备的.

特别地，紧致 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上的 C^∞ 切向量场 X 是完备的.

证明 对任何 $p\in K$，由定理 3，存在 p 的开邻域 $\tilde{V}(p)$ 和 $\tilde{\varepsilon}(p)>0$，使得向量场 X 在 $(-\tilde{\varepsilon}(p),\ \tilde{\varepsilon}(p))\times\tilde{V}(p)$ 上产生 C^∞ 局部变换的局部 1 参数群 h_t. 因为 $h_0=\mathrm{Id}_{\tilde{V}(p)}$ 和 $h:(-\tilde{\varepsilon}(p),\tilde{\varepsilon}(p))\times\tilde{V}(p)\to M$ 为 C^∞ 映射，故存在 p 的开邻域 $V(p)\subset\tilde{V}(p)$ 和 $0<\varepsilon(p)\leqslant\tilde{\varepsilon}(p)$，使得当 $x\in V(p)$，$|s|<\varepsilon(p)$ 时，$h_s(x)\in\tilde{V}(p)$. 因为 K 紧致，开复盖 $\{V(p)\,|\,p\in K\}$ 有有限子复盖 $\{V(p_i)\,|\,i=1,\ \cdots,\ k\}$. 令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon(p_i)\,|\,i=1,\cdots,k\}$，$h_t(x)=x,x\in M-K,|t|<\varepsilon$. 根据定理 3 后半部分的结论，$h_t$ 为 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times M$ 上的 C^∞ 局部变换的局部 1 参数群. 于是，当 $|t|,|s|,|t+s|<\varepsilon$ 时，h_t 为 C^∞ 同胚且当 $x\in V_i(p)$ 时，$h_s(x)\in\tilde{V}_i(p)$，$h_{t+s}(x)=h_t\circ h_s(x)$.

设 $t\in\mathbf{R},t=n\cdot\frac{\varepsilon}{2}+r,n\in\mathbf{Z}$，$|r|<\frac{\varepsilon}{2}$. 如果 $n\geqslant0$，令 $h_t=\underbrace{h_{\frac{\varepsilon}{2}}\circ h_{\frac{\varepsilon}{2}}\circ\cdots\circ h_{\frac{\varepsilon}{2}}}_{n\text{个}}\circ h_r$；如果 $n<0$，令 $h_t=h_{-\frac{\varepsilon}{2}}\circ h_{-\frac{\varepsilon}{2}}\circ\cdots\circ h_{-\frac{\varepsilon}{2}}\circ h_r$. 不难验证 h_t 是定义确切的，C^∞ 类的，并且对任何 $t,s\in\mathbf{R},h_{t+s}=h_t\circ h_s$. 这就完成了定理的证明. #

例 1 说明定理 4 中“$X|_{M-K}=0$，K 为紧致子集”不能省略.

作为定理 4 的一个重要应用，我们得到：连通的 C^∞ 流形为齐性空间，甚至有更强的齐性定理. 为此，先引进 C^r 同伦和 C^r 同痕的概念.

定义 5 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^r 流形，$r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$，$i=1,2$. $f,\ g:M_1\to M_2$ 为 C^k 映射，$0\leqslant k\leqslant r$. 如果存在 C^k 映射 $F:[0,1]\times M_1\to M_2$ 使得 $F(0,x)=f(x)$，$F(1,x)=g(x),x\in M_1$，则称 F 为连 f 和 g 的一个**C^k同伦**，称 f**C^k同伦于** g. 记作 $f\sim g$.

定义 6 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^r 流形，$r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$，$i=1,\ 2$. $f,\ g:M_1\to M_2$ 为 C^k 同胚，$0\leqslant k\leqslant r$. 如果存在连 f 和 g

的 C^k 同伦 $F:[0,1]\times M_1\to M_2$ 使得对每个 $t\in[0,1]$, $F(t,\cdot):M_1\to M_2$, $x\mapsto F(t,x)$ 为 C^k 同胚，则称 F 为连 C^k 同胚 f 和 g 的 C^k **同痕**，称 f C^k **同痕于** g. 也记 $f\sim g$.

定理 5 C^k 同伦的关系是一个等价关系.

类似地，C^k 同痕的关系也是一个等价关系.

证明 只须证 C^k 同伦的情形.

对任何 C^k 映射 $f:M_1\to M_2$，令 $F:[0,1]\times M_1\to M_2$, $F(t,x)=f(x)$，则 F 为连 f 和 f 的 C^k 同伦，因而 $f\sim f$.

如果 $f\sim g$, F 为连 f 和 g 的 C^k 同伦，则 $G:[0,1]\times M_1\to M_2$, $G(t,x)=F(1-t,x)$ 为连 g 和 f 的 C^k 同伦，因而 $g\sim f$.

设 $f\sim g$, F 为连 f 和 g 的一个 C^k 同伦. 则 $F_1:[0,1]\times M_1\to M_2$, $F_1(t,x)=F(\varphi(t),x)$ 为连 f 和 g 的另一 C^k 同伦，其中

$$\lambda(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\varphi(t)=\frac{\lambda\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\lambda\left(t-\frac{1}{3}\right)+\lambda\left(\frac{2}{3}-t\right)}\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3},\\ 1, & \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$F_1(t,x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3},\\ g(x), & \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

若 $f\sim g$, $g\sim h$, F 和 G 分别为连 f 和 g 以及连 g 和 h 的 C^k 同伦. 令 $F_1(t,x)=F(\varphi(t),x)$, $G_1(t,x)=G(\varphi(t),x)$,

$$H(t,x)=\begin{cases}F_1(2t,x), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ G_1(2t-1,x), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

则H为连f和h的C^k同伦，从而$f\sim h$. ＃

例 2 设连通C^∞流形$M=\boldsymbol{R}^n$或S^n，则M上存在一个将点y变为z的C^∞同胚$f:M\to M$，且Id_M C^∞同痕于f.

$M=\boldsymbol{R}^n$，令$f:M\to M$，$f(x)=x+(z-y)$，$F:[0,1]\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$，$F(t,x)=x+t(z-y)$为连$F(0,\cdot)=\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n}$和$F(1,\cdot)=f$的$C^\infty$同痕.

$M=S^n$，设$y,z\in S^n$为任何二点．如果$y=z$，令$f=\mathrm{Id}_{S^n}$，$F(t,\cdot)=\mathrm{Id}_{S^n}(\cdot)$．如果$y\neq z$，仿照§1例9，令$e_1=y$，且$\{e_1,e_2\}$为$yOz$平面上的规范正交基，设$z=\cos\theta\cdot e_1+\sin\theta\cdot e_2$，$\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$为$\boldsymbol{R}^{n+1}$的规范正交基．取

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}\in O(n+1),$$

显然，$Ay=z$．如果记

$$A(t)=\begin{pmatrix}\cos t\theta & -\sin t\theta & & & \\ \sin t\theta & \cos t\theta & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix},$$

$f:S^n\to S^n$，$f(x)=Ax$，$F:[0,1]\times S^n\to S^n$，$F(t,x)=A(t)x$．容易看出F为连Id_{S^n}和f的C^∞同痕，且$f(y)=z$.

为了证明连通C^∞流形M上的齐性定理，先证下面的引理.

引理 1 对任何$y\in\{x\in\boldsymbol{R}^n\mid\|x\|<1\}$，存在$C^\infty$映射$F:\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$使得

(1) 对任何$t\in\boldsymbol{R}^1$，$\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n}$ C^∞同痕于$F_t=F(t,\cdot)$.

(2) 当 $x\in \boldsymbol{R}^n-\overline{O(0,1)}$ 时, $F(t,x)=x$, $t\in \boldsymbol{R}^1$, 其中 $O(0, 1)$ 为以 O 为中心 1 为半径的开单位球;

(3) $F(0,\cdot)=\mathrm{Id}_{R^n}$;

(4) 存在 $t_0\in \boldsymbol{R}^1$, 使 $F_{t_0}(0)=F(t_0,0)=y$.

证明 设 $\lambda(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}}, t>0,\\ 0, t\leqslant 0,\end{cases}$ 显然 $\lambda\in C^\infty(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$. 令 $\varphi(x)=\lambda(1-\|x\|^2)=\begin{cases}>0, 当\|x\|<1,\\ =0, 当\|x\|\geqslant 1,\end{cases}$ 其中 $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x^i)^2}$, 则 $\varphi\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R})$. 取定任一单位向量 $c\in S^{n-1}$, 考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 C^∞ 切向量场 X 使 $X|_x=\varphi(x)c$, 由于 $X|_{R^n-\overline{O(0,1)}}=0$, 根据定理4, X 是完备的, 故存在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 C^∞ 变换的整体 1 参数群 F_t, 使 $F:\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$, $F_t(x)=F(t, x)$ 为 C^∞ 映射, $\frac{dF_t(x)}{dt}=X_{F_t(x)}=\varphi(F_t(x))c$ 且满足:

(a) $F_{t+s}(x)=F_t\circ F_s(x)$, $t,s\in \boldsymbol{R}^1$, $x\in \boldsymbol{R}^n$;

(b) $F_0(x)=x$, $x\in \boldsymbol{R}^n$.

(1) 由(a)(b)知 F_t, $F_t^{-1}=F_{-t}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 为 C^∞ 同胚. 又因 $F(st, x)$ 为连 $F_0=\mathrm{Id}_{R^n}$ 和 F_t 的 C^∞ 同痕, 故 $F_0=\mathrm{Id}_{R^n}$ C^∞ 同痕于 F_t.

(2) 设 $x\in \boldsymbol{R}^n-\overline{O(0,1)}$, 则存在 $\varepsilon>0$, 对任何 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 有 $F_t(x)\in \boldsymbol{R}^n-\overline{O(0,1)}$, 此时, $\frac{dF_t(x)}{dt}=\varphi(F_t(x))=0$, $F_t(x)=F_0(x)=x$. 由此不难看出, 对任何 $t\in \boldsymbol{R}^1$, $F_t(x)=F(t,x)=x$.

(3) 由(b)直接得证.

(4) 取 $c=\frac{y}{\|y\|}(y\neq 0)$, 则存在 $t_0\in \boldsymbol{R}^1$ 使 $F_{t_0}(0)=F(t_0,0)=y$.

如果 $y=0$, 则取 $F(t,x)=x$, $t\in \boldsymbol{R}^1$, $x\in \boldsymbol{R}^n$. #

定理 6 (齐性定理) 设 y,z 为 n 维 C^∞ 连通流形 $(M, \mathscr{D})$ 的

任意二点，则存在 C^∞ 同痕 $F:[0,1]\times M\to M$，使 $F(0,\cdot)=\mathrm{Id}_M$ C^∞同痕于 $F(1,\cdot)=f$，且 $f(y)=z$.

证明 如果存在一个 C^∞同痕 $F:[0,1]\times M\to M$ 使$\mathrm{Id}_M=F(0,\cdot)C^\infty$ 同痕于 $F(1,\cdot)$，且 $F(1,y)=z$，则称 y 同痕于 z，记为$y\sim z$.

显然，$y\sim y$，只须取 $F(t,x)=x$，$t\in[0,1]$，$x\in M$.

如果 $y\sim z$，则存在上述的 C^∞ 同痕 F. 令 $G(t,x)=F_t^{-1}(x)$，易见 $G:[0,1]\times M\to M$ 为 C^∞ 同痕，且 $G_0(\cdot)=G(0,\cdot)=F_0^{-1}(\cdot)=\mathrm{Id}_M(\cdot)$，$G_1(\cdot)=G(1,\cdot)=F_1^{-1}(\cdot)$，$G_1(z)=F_1^{-1}(z)=y$，故 $z\sim y$.

如果 $y\sim z$，$z\sim w$，它们相应的 C^∞ 同痕为 $F:[0,1]\times M\to M$ 和 $G:[0,1]\times M\to M$，且 $F(0,\cdot)=\mathrm{Id}_M$，$G(0,\cdot)=\mathrm{Id}_M$，$F(1,y)=F_1(y)=z$，$G(1,z)=G_1(z)=w$，则$H_t(\cdot)=H(t,\cdot)=G(t,F(t,\cdot))=G_t\circ F_t(\cdot)$，$H_0(\cdot)=H(0,\cdot)=G(0,F(0,\cdot))=F(0,\cdot)=\mathrm{Id}_M(\cdot)$，$H_1(y)=G_1\circ F_1(y)=G_1(z)=w$，因此 $y\sim w$.

综合上述，二个点的同痕关系是等价关系，对任何 $x\in M$，存在一个 C^∞ 同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 的开邻域，再由引理 1，存在 x 的开邻域 U，使 xC^∞ 同痕于V 中的任一点 y. 于是，M的每个"同痕类"都是开集，进而M为互不相交的开的"同痕类"之并. 因为M连通，故只有一个同痕类，定理证毕. #

引理 1 和定理 6 可以推广到更一般的

推论 1 设 A 为 n 维C^∞流形$(M,\mathscr{D})$ 的闭子集，$\{p_1,\cdots,p_m\}$ 和$\{q_1,\cdots,q_m\}$为连通开子流形 $M-A$ 中的两组点集，且当 $i\neq j$ 时，$p_i\neq p_j$，$q_i\neq q_j$. 则存在 C^∞ 映射 $F:\boldsymbol{R}^1\times M\to M$ 使得

(1) 对任何 $t\in\boldsymbol{R}^1$，Id_M 同痕于 $F_t=F(t,\cdot)$；

(2) $F(t,x)=x$，$t\in\boldsymbol{R}^1$，$x\in A$；

(3) $F(0,\cdot)=\mathrm{Id}_M(\cdot)$；

(4) 存在 $t_0\in\boldsymbol{R}^1$ 使 $F_{t_0}(p_i)=F(t_0,p_i)=q_i$，$i=1,\cdots,m$

(当 $m\geqslant 2$ 时，$\dim M\geqslant 2$).

证明 $m=1$. 由第一章§1定理3，连通开子流形 $M-A$ 是道路连通的，故存在道路 $\sigma:[0,1]\to M-A$ 使 $\sigma(0)=p_1, \sigma(1)=q_1$. 再从 $\sigma([0,1])$ 的紧致性，反复用引理1推出定理的结论.

当 $m\geqslant 2, \dim M\geqslant 2$ 时，应用归纳法证明. 上述已证命题对 $m=1$ 是正确的. 假设命题对 $m=k$ 是正确的. 则对 $\{p_1,\cdots,p_{k+1}\}$ 和 $\{q_1,\cdots,q_{k+1}\}$，存在 C^∞ 映射 $F:\boldsymbol{R}^1\times M\to M$ 使

(1) 对任何 $t\in\boldsymbol{R}^1$, $\mathrm{Id}_M C^\infty$ 同痕于 $F_t=F(t,\cdot)$;

(2) $F(t,x)=x, t\in\boldsymbol{R}^1, x\in A$;

(3) $F(0,\cdot)=\mathrm{Id}_M(\cdot)$;

(4) 存在 $t_0\in\boldsymbol{R}^1$ 使 $F_{t_0}(p_i)=F(t_0,p_i)=q_i,\ i=1,\cdots,k$.

设 $F_{t_0}(p_{k+1})=F(t_0,p_{k+1})=p'_{k+1}$. 如果 $p'_{k+1}=q_{k+1}$，则命题对 $m=k+1$ 得证. 否则记 $A_1=A\cup\{p_1,\cdots,p_k,q_1,\cdots,q_k\}$ (A_1 仍为闭集，$M-A_1$ 仍为连通开子流形!)，则存在 C^∞ 映射 $G:\boldsymbol{R}^1\times M\to M$ 使

(1) 对任何 $t\in\boldsymbol{R}^1$, $\mathrm{Id}_M C^\infty$ 同痕于 $G_t=G(t,\cdot)$;

(2) $G(t,x)=x,\ t\in\boldsymbol{R}^1, x\in A_1$;

(3) $G(0,\cdot)=\mathrm{Id}_M(\cdot)$;

(4) 存在 $t_1\in\boldsymbol{R}^1$，使 $G_{t_1}(p'_{k+1})=G(t_1,p'_{k+1})=q_{k+1}$.

则 $H_t(\cdot)=H(t,\cdot)=G(t,F(t_0,\cdot))=G_t(F(t_0,\cdot))=G_t(F_{t_0}(\cdot))=G_t\circ F_{t_0}(\cdot)$ 为所求 C^∞ 映射，因此命题对 $m=k+1$ 也是正确的. #

现在我们来研究 C^∞ 切向量场 Y 关于 C^∞ 切向量场 X 的 Lie 导数，并引入 n 维 C^∞ Lie 群的 n 维 Lie 代数

定义7 设 X 和 Y 为 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的开集 V 上的 C^∞ 切向量场，定义 $L_XY=[X,Y]$ 如下:

$[X,Y]_pf=X_p(Yf)-Y_p(Xf), p\in V$, f 为 V 上的 C^∞ 函数. 由下面的引理2，$[X,Y]$ 为 V 上的 C^∞ 切向量场，称为 X 和 Y 的**交换子积或方括号积**或 Y 关于 X 的 **Lie 导数**.

引理 2 $[X,Y]$为V上的C^∞切向量场.

证明 设$f,g\in C^\infty(V,\mathbf{R}),\lambda\in\mathbf{R}$,则

$$[X,Y]_p(f+g)=X_p(Y(f+g))-Y_p(X(f+g))$$
$$=(X_p(Yf)-Y_p(Xf))+(X_p(Yg)-Y_p(Xg))$$
$$=[X,Y]_pf+[X,Y]_pg;$$
$$[X,Y]_p(\lambda f)=X_p(Y(\lambda f))-Y_p(X(\lambda f))$$
$$=\lambda(X_p(Yf)-Y_p(Xf))$$
$$=\lambda[X,Y]_pf;$$
$$[X,Y]_p(fg)=X_p(Y(fg))-Y_p(X(fg))$$
$$=X_p(fYg+gYf)-Y_p(fXg+gXf)$$
$$=f(p)(X_p(Yg)-Y_p(Xg))+g(p)(X_p(Yf)-Y_p(Xf))$$
$$=f(p)[X,Y]_pg+g(p)[X,Y]_pf.$$

这就证明了$[X,Y]_p\in T_pM$. 从§3定理2(2)推出$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$是C^∞类的,再由§3定理2(2)推出$[X,Y]$是C^∞的. #

定理 7 设X,Y,Z为n维C^∞流形$(M,\mathscr{D})$的开集V上的C^∞切向量场,$f,g,h\in C^\infty(V,\mathbf{R})$,$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,$(U,\varphi)$,$\{x^i\}$为局部坐标系,则$[\ ,\ ]$有以下性质:

(1) $[X,Y]=-[Y,X]$, 反称性,

$[X,X]=0$,幂零律;

(2) $\left.\begin{array}{l}[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z],\\ [X,\lambda Y+\mu Z]=\lambda[X,Y]+\mu[X,Z],\end{array}\right\}$双线性;

(3) $[fX,gY]=f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]$;

(4) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ Jacobi 恒等式;

(5) $\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$;

(6) 如果$X=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\sum_{j=1}^n b^j\frac{\partial}{\partial x^j}$,则有

$$[X,Y]=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}-b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

证明 (1)(2)由定义 7 立即可得.

(3) $[fX,gY]h=(fX)(gY)h-(gY)(fX)h$

$=(fX)(g\cdot Yh)-(gY)(f\cdot Xh)$

$=fg(XYh)+f(Xg)(Yh)-gf(YXh)-g(Yf)(Xh)$

$=\{f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]\}h.$

(4) $[X,[Y,Z]]f=X[Y,Z]f-[Y,Z]Xf$

$=X(YZf-ZYf)-(YZXf-ZYXf)$

$=(XYZ-XZY-YZX+ZYX)f,$

则由对称性得

$\{[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]\}f$

$=(XYZ-XZY-YZX+ZYX)f$

$+(YZX-YXZ-ZXY+XZY)f$

$+(ZXY-ZYX-XYZ+YXZ)f$

$=0.$

(5) $$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]f=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}f\right)-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}f\right)=\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}=0.$$

(6) $$[X,Y]=\left[\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[a^i\frac{\partial}{\partial x^i},b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}b^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}-b^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}a^i\right)\frac{\partial}{\partial x^i}+a^ib^j\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}-b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}. \qquad \#$$

注 1 利用定理 7(6)，在局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$ 中定义 $[X,Y]=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}-b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$. 可验证上式右边与局部坐标系的选取无关，因而可定义整体的 C^∞ 切向量场 $[X,Y]$. 用上述定义，对任何 C^∞ 函数 f 有 $[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$，并还可证明定理 7 中的(1)—(5)(参阅[岩堀长庆]).

定理 8 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n 维 C^∞ 流形，$i=1,2$，$f:M_1\to M_2$ 为 C^∞ 微分同胚，X_1,X_2 为 M_1 上的 C^∞ 切向量场，则

$$f_*[X_1,X_2]=[f_*X_1,f_*X_2].$$

证明 设 $h\in C^\infty(M_2,\mathbf{R})$，则

$$\begin{aligned}
[f_*X_1,f_*X_2]_{f(p)}h&=(f_*X_1)_{f(p)}(f_*X_2)h-(f_*X_2)_{f(p)}(f_*X_1)h\\
&=f_{*p}(X_1)_p(f_*X_2)h-f_{*p}(X_2)_p(f_*X_1)h\\
&=(X_1)_p(f_*X_2)h\circ f-(X_2)_p(f_*X_1)h\circ f\\
&=(X_1)_p(X_2(h\circ f))-(X_2)_p(X_1(h\circ f))\\
&=[X_1,X_2]_p(h\circ f)=f_{*p}([X_1,X_2]_p)h,
\end{aligned}$$

于是，
$$f_*[X_1,X_2]=[f_*X_1,f_*X_2]. \quad \#$$

定义 8 设 V 为域 F 上的 n 维向量空间. 如果在 V 中定义的"乘法"运算

$$[\ ,\ ]:V\times V\to V,\ (X,Y)\longmapsto[X,Y],$$

满足:

(1) $[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z]$，左分配律;

(2) $[X,Y]=-[Y,X]$，反称性;

(3) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$，Jacobi 恒等式，这里 $\lambda,\mu\in F$，$X,Y,Z\in V$，则称 $(V,[\ ,\ ])$ 或 V 为域 F 上的**Lie 代数**或 **Lie 环**.

注 2 从(1)和(2) 立即可推出 $[Z,\lambda X+\mu Y]=\lambda[Z,X]+\mu[Z,Y]$，右分配律. 此外，如果域 F 不是特征 2 的，则由(2)得到

$[X,X]=-[X,X], 2[X,X]=0, [X,X]=0$(幂零律).

例 3 设 $\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{R})=\{A=(a_{ij})\mid A$ 为 n 阶实方阵$\}$，它是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的 n^2 维实向量空间，令

$$[A,B]=AB-BA.$$

容易验证$(\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{R}),\ [\ \ ,\ \ ])$或 $\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{R})$ 为实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lie 代数，称为全线性代数.

定理 9 设 $L(G)$ 为 C^∞Lie 群 G 上左不变向量场的全体，则 $L(G)$ 为实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的 n 维向量空间，并且关于 Lie 导数运算 $[\ \ ,\ \ ]$，$(L(G),[\ \ ,\ \ ])$或 $L(G)$ 为实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的 n 维 Lie 代数(称为 C^∞ Lie 群 G 的 Lie 代数).

证明 设 $\lambda,\ \mu\in\boldsymbol{R}, X,Y\in L(G)$. 由定理 8 和 §3 定理 6 得到

$$(L_a)_*(\lambda X+\mu Y)=\lambda(L_a)_*X+\mu(L_a)_*Y=\lambda X+\mu Y \quad (a\in G)$$

和

$$(L_a)_*[X,Y]=[(L_a)_*X,(L_a)_*Y]=[X,Y],$$

由此推出 $\lambda X+\mu Y\in L(G), [X,Y]\in L(G)$.

此外，取 T_eG 的一个基 $\{(X_i)_e\mid i=1,\cdots,n\}$，则显然$\{X_i\mid (X_i)_a=(L_a)_{*e}(X_i)_e, a\in G, i=1,\cdots,n\}$为 $L(G)$ 的一个基. 事实上，若$\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iX_i=0, \lambda_i\in\boldsymbol{R}$，则 $0=\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iX_i\right)_e=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(X_i)_e$，于是 $\lambda_i=0$，$i=1$，$\cdots,n$，即$\{X_i\mid i=1,\cdots,n\}$ 是线性无关的. 另一方面，对任意 $X\in L(G)$，$X_e=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(X_i)_e$，则 $X_a=(L_a)_{*e}X_e=(L_a)_{*e}\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(X_i)_e\right)=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(L_a)_{*e}(X_i)_e=\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iX_i\right)_a$，故 $X=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iX_i, \lambda_i\in\boldsymbol{R}$，所以$\{X_i\mid i=1,\cdots,n\}$为 $L(G)$的一个基，而 $L(G)$ 是一个 n 维向量空间.

最后，由定理 7(1)(2)(4)推出 $L(G)$满足定义 8 中的条件(1)(2)(3)，所以它是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的一个 Lie 代数. #

例 4 由第二章 § 1 例 4，n 次实一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 为 n^2 维 C^∞Lie 群(也是 C^ωLie 群). 如果用

$$E_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

（1 位于第 j 列）

表示切向量$\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$，$x_{ij}$ 为 $GL(n,\boldsymbol{R})$的整体坐标，则C^∞Lie 群$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$上的切向量 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$仍可用 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

表示，但此时 $\det A$ 可为 0.

现在再来看由 g 所决定的左移 $L_g: x\longrightarrow gx=y$，这个映射的 Jacobi 方阵的系数是

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{kl}}=\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\left(\sum_{s=1}^{n} g_{is}x_{sj}\right)=\begin{cases} g_{ik}, & l=j, \\ 0 & l\neq j. \end{cases}$$

因此，在单位元素上的切向量 A 所决定的左不变向量场为

$$X_g=\left(\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{kl}}a_{kl}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{kj}}a_{kj}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n} g_{ik}a_{kj}\right)$$
$$=gA=(\alpha_{ij}).$$

如果 $Y_g=gB=\left(\sum\limits_{k=1}^{n} g_{ik}b_{kj}\right)=(\beta_{ij})$是由单位元素上另一切向量

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

所决定的左不变向量场，则

$$\begin{aligned}[X,Y]&=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k,l=1}^{n}\left(\alpha_{kl}\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial u_{kl}}-\beta_{kl}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial u_{kl}}\right)\right)\frac{\partial}{\partial g_{ij}}\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\alpha_{il}\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial u_{il}}-\beta_{il}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial u_{il}}\right)\right)\frac{\partial}{\partial g_{ij}}\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}(\alpha_{il}b_{lj}-\beta_{il}a_{lj})\right)\frac{\partial}{\partial g_{ij}}\end{aligned}$$

令 $g_{ij}=\delta_{ij}$ 即 $g=I_n$，则 $(\alpha_{ij})=I_nA=A=(a_{ij})$，$(\beta_{ij})=(b_{ij})$，因而

$$[X,Y]_{I_n}=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}(a_{il}b_{lj}-b_{il}a_{lj})\right)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_{I_n},$$

这说明 $[X,Y]$ 是由方阵 $AB-BA$ 所决定的左不变向量场. 例 3 和上面的计算表明，$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 的 Lie 代数 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$ 与全线性代数是同构的.

注 3 设 C^∞ 曲线 $x(t)$，$x(0)=I_n$，切向量 $x'(0)=A$，则由 A 决定的左不变向量场 $X_g=(Lg)_{*I_n}A=\frac{d}{dt}(gx(t))|_{t=0}=gx'(0)=gA$.

定义方阵的指数映射 $A\longmapsto e^A=\exp A=I+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A^m}{m!}$，使我们可以具体给出由 A 所决定的左不变向量场的 C^∞ 变换的 1 参数群 h_t. 先证明指数映射的性质.

引理 3 设 A 为 n 阶复方阵，定义 n 阶复方阵

$$e^A=\exp A=I+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A^m}{m!}.$$

则

(1) 上式右边级数当 A 在 C^{n^2} 中一有界集中变化时，它是一致收敛的；

(2) 指数映射 $A \longmapsto e^A = \exp A$ 为解析映射；

(3) $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$;

(4) $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}A}$，这里 $A = (a_{ij})$，$\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 为 A 的迹. 因而 $e^A \in GL(n, C)$. 如果 A 为 n 阶实方阵，则 $\det e^A > 0$;

(5) 如果 $AB = BA$，则 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B (= e^B \cdot e^A)$;

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $AB \neq BA$, $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$;

(7) $e^0 = I_n$, $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ (因而 $\det e^A \neq 0$);

(8) 设 $x(t) = e^{tA} = \exp(tA)$, $t \in \mathbf{R}$，则

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot A (= A \cdot x(t));$$

(9) 如果 $\overline{A'} = -A$，则 $e^A \in U(n) = \{B \in GL(n, C) \mid \overline{B'}B = B\overline{B'} = I_n\}$ (单式群或酉群).

反之，若 $B \in U(n)$，则存在 n 阶复方阵 A，使 $\overline{A'} = -A$ 且 $B = e^A$.

(10) 如果 A 为 n 阶实方阵，且 $A' = -A$，则 $e^A \in O(n)^+ = \{B \in GL(n, \mathbf{R}) \mid B'B = BB' = I_n, \det B > 0\}$.

反之，若 $B \in O(n)^+$，则存在 n 阶实方阵 A，使 $A' = -A$，且 $B = e^A$.

证明 (1) A 中元素的绝对值不超过 M，即当 $A = (a_{ij})$ 时，$|a_{ij}| \leqslant M$. 归纳可证 A^m 中元素的绝对值不超过 $n^{m-1}M^m$，又因为 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(nM)^m}{m!}$ 收敛，故级数 $I_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ 在此有界集上是一致收敛的.

(2) 将 a_{ij} 视作自变量，显然 A^m 中元素关于 a_{ij} 是 m 次的，由(1)可知 $I_n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A^m}{m!}$ 中每个元素已表达为 a_{ij} 的收敛的幂级数，故 $A\longmapsto e^A=\exp A$ 为解析映射.

(3) 由(1), 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{(PAP^{-1})^m}{m!}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \left|P\left(\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{A^m}{m!}\right)P^{-1}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\text{则}$$

$$|e^{PAP^{-1}}-Pe^AP^{-1}|\leqslant\left|\left(I_n+\sum_{m=1}^{N}\frac{(PAP^{-1})^m}{m!}\right)-P\left(I_n+\sum_{m=1}^{N}\frac{A^m}{m!}\right)P^{-1}\right|$$

$$+\left|\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{(PAP^{-1})^m}{m!}\right|+\left|P\left(\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{A^m}{m!}\right)P^{-1}\right|<0+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to0$ 得到 $e^{PAP^{-1}}=Pe^AP^{-1}$.

(4) 由线性代数知, 存在可逆方阵 P, 使 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$,

其中 λ_j 为 A 的特征值, $j=1,\cdots,n$. 于是

$$\det e^A=\det e^{P\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ \ddots & \\ 0 & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}}=\det Pe^{\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ \ddots & \\ 0 & \lambda_n\end{pmatrix}}P^{-1}=\det e^{\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ \ddots & \\ 0 & \lambda_n\end{pmatrix}}$$

$$=\det\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}=e^{\lambda_1}\cdots e^{\lambda_n}=e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=e^{\mathrm{Tr}\,A}.$$

(5) 如果 $AB=BA$, 则

$$e^{A+B}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(A+B)^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{C_m^kA^kB^{m-k}}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{A^kB^{m-k}}{k!(m-k)!}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B^l}{l!}\right)=e^A\cdot e^B,$$

由(1)保证了最后第二个等号是成立的.

(6) 直接计算即得.

(7) 显然 $e^0=I_n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{0^m}{m!}=I_n$, 再由(5)得到

$e^A\cdot e^{-A}=e^{A+(-A)}=e^0=I_n$, 故$e^{-A}=(e^A)^{-1}$.

(8) 设 $t\in(-a,a)$, 则由(1)和$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mt^{m-1}A^m}{m!}$的一致收敛性知,对 t 可逐项求导,故

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(I+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^mA^m}{m!}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mt^{m-1}A^m}{m!}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^{m-1}A^{m-1}}{(m-1)!}\right)A$$
$$=x(t)A.$$

(9) 由(1)和(3)中证法知 $e^{\overline{A}'}=\overline{(e^A)'}$. 于是,

$e^A\cdot\overline{(e^A)'}=e^A\cdot e^{\overline{A}'}=e^{A+\overline{A}'}=e^{A+(-A)}=e^0=I_n$, 故 $e^A\in U(n)$.

若 $B\in U(n)$, 则存在酉阵 P 使

$$B=P\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}&&\\&\ddots&\\&&e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\overline{P}'=Pe^{\begin{pmatrix}i\theta_1&&\\&\ddots&\\&&i\theta_n\end{pmatrix}}\overline{P}'=e^{P\begin{pmatrix}i\theta_1&&\\&\ddots&\\&&i\theta_n\end{pmatrix}\overline{P}'},$$

$$\theta_j\in\mathbf{R},\ j=1,\cdots,n.$$

令 $A=P\begin{pmatrix}i\theta_1&&\\&\ddots&\\&&i\theta_n\end{pmatrix}\overline{P}'$, 显然 $\overline{A}'=-A$.

(10) 由(1)和(3)中证法知 $e^{A'}=(e^A)'$. 于是,

$e^A\cdot(e^A)'=e^A\cdot e^{A'}=e^{A+A'}=e^{A+(-A)}=e^0=I_n$, 故 $e^A\in O(n)$.

若 $B\in O(n)^+$, 则存在正交矩阵 P 使

$$B=P\begin{pmatrix}\cos\theta_1&-\sin\theta_1&&&&&&\\\sin\theta_1&\cos\theta_1&&&&&&\\&&\ddots&&&&&\\&&&\cos\theta_j&-\sin\theta_j&&&\\&&&\sin\theta_j&\cos\theta_j&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&1\end{pmatrix}P'$$

$$=P\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

$$\cdots\begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\theta_j & -\sin\theta_j & & & \\ & & & \sin\theta_j & \cos\theta_j & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1\end{pmatrix}P'$$

$$=P\cdot\exp\begin{pmatrix}0 & -\theta_1 & & & \\ \theta_1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}\cdots\exp\begin{pmatrix}0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -\theta_j & & & \\ & & & \theta_j & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0\end{pmatrix}P'$$

$$=\exp\left(P\begin{pmatrix}0 & -\theta_1 & & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & -\theta_j & & \\ & & & \theta_j & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0\end{pmatrix}P'\right),\ \theta_j\in\mathbf{R},\ j=1,\cdots,n.$$

令 $A=P\begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -\theta_j & & & \\ & & & \theta_j & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}P'$

$$=P\begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -\theta_j & & & \\ & & & \theta_j & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}P',$$

显然 $A'=-A$. #

现在,我们就可应用引理 3 给出由 A 产生的 $\mathbf{GL}(n,\mathbf{R})$ 上的左不变向量场 $X_g=gA$ 的 C^∞ 变换的 1 参数群 h_t. 过单位元素的 X 的流线 $x(t)=e^{tA}=\exp(tA)=I_n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^mA^m}{m!}$, 这是因为

$$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)A, x(0)=I.$$

因此,所要求的 $h_t(g)=ge^{tA}$. 事实上,

$$h_0(g)=ge^0=gI_n=g,$$

$$\frac{d}{dt}h_t(g)\bigg|_{t=0}=\frac{d}{dt}(ge^{tA})\bigg|_{t=0}=ge^{tA}A\big|_{t=0}=gA=X_g,$$

$$h_{t+s}(g)=ge^{(t+s)A}=ge^{sA}\cdot e^{tA}=h_t(ge^{sA})=h_t\circ h_s(g).$$

例 5 第二章 §1 例 8 已证明 $O(n)$ 为 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维 C^ω Lie 子群. 因而 I_n 处的切空间 $T_{I_n}(O(n))$ 可视作 $T_{I_n}(\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}))$ 的子空间, 下面可以证明 $T_{I_n}(O(n)) = \{A \mid A' = -A\}$. 由此重新得到 $O(n)$ 的维数 $= T_{I_n}(O(n))$ 的维数 $= \frac{n(n-1)}{2}$.

如果 $A' = -A$, A 为 n 阶实方阵, 则由引理3(10), $e^{tA} \in O(n)^+$, $e^{tA}|_{t=0} = I_n$, $\frac{d}{dt} e^{tA}|_{t=0} = e^{tA}A|_{t=0} = A$, 故 $A \in T_{I_n}(O(n))$. 反之, 若 $x(t) \in O(n)^+$, $x(0) = I_n$, $x'(0) = A \in T_{I_n}(O(n))$. 则 $A' + A = x'(0)' + x'(0) = [x'(t)' x(t) + x(t)' x'(t)]|_{t=0} = \frac{d}{dt}[x(t)' x(t)]|_{t=0} = \frac{d}{dt} I_n|_{t=0} = 0$, 于是 $A' = -A$.

现在, 我们给出 $[X, Y]$ 的另一表达式.

定理 10 设 $(M, \mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形, $X, Y \in C^\infty(TM)$, h_t 为 Y 的 C^∞ 局部 1 参数群, 则

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}(h_t)_* X|_{t=0}.$$

证明 在 $p \in M$ 的局部坐标系 $\{x^i\}$ 中, 设 $X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $h_t = (h_t^i)$. 则

$$(h_t)_* X|_p = (h_t)_*|_{h_{-t}(p)} X = \sum_{i=1}^n a^i(h_{-t}(p)) \cdot (h_t)_*|_{h_{-t}(p)} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= \sum_{i=1}^n a^i(h_{-t}(p)) \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_t^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\frac{d}{dt} a^i(h_{-t}(p))|_{t=0} = \frac{d}{dt} h_{-t}(p) a^i|_{t=0} = -Y(p) a^i,$$

$$\frac{d}{dt}h_t^j(p)=b^j(p).$$

所以，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial h_t^j}{\partial x^i}(p)\Big|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{d}{dt}h_t^j(p)\Big|_{t=0}=\frac{\partial b^j}{\partial x^i}(p)$$

和

$$\frac{d}{dt}(h_t)_*X\Big|_{t=0}=\sum_{i,j=1}^n\frac{d}{dt}a^i(h_{-t})\Big|_{t=0}\frac{\partial h_t^j}{\partial x^i}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a^i(h_{-t})\Big|_{t=0}\frac{d}{dt}\frac{\partial h_t^j}{\partial x^i}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{i,j=1}^n\left(-Ya^i\cdot\delta_i^j+a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$=\sum_{j=1}^n\left[\sum_{i=1}^n\left(a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}-b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^j}=[X,Y].\qquad \#$$

例 6 应用定理 10 重新计算例 4 中的$[X,Y]_{I_n}$如下．因为

$L_g(x)=gx, h_t(g)=g\cdot\exp tB, Y_g=gB$. 设右移 $R_g, R_g(x)=xg$. 则 $R_g(x(t))=x(t)g$, $(R_g)_*(x'(t))=x'(t)g$. 于是$h_t(I_n)=\exp tB$ 和

$$[X,Y]_{I_n}=\frac{d}{dt}(h_t)_*X\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}((R_{\exp tB})_*X_{\exp(-tB)})\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}((R_{\exp tB})_*\exp(-tB)\cdot A)\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}(\exp(-tB)\cdot A\cdot\exp tB)\Big|_{t=0}$$

$$=AB-BA=[A,B].$$

最后，我们不加证明地叙述两个重要的定理．

定理 11 设 M 为 n 维C^∞流形，$U\subset M$ 为开集，$X_1,\cdots,X_k\in C^\infty(TU)$，使得$\{X_1(x),\cdots,X_k(x)\}$对所有的$x\in U$是线性无关的．则

在 U 上，$[X_i,X_j]=0$，$1\leqslant i<j\leqslant k\Longleftrightarrow$对任何 $p\in U$，存在 p 的局部坐标系(U_0,φ)，$\{x^i\}$使得 $U_0\subset U$ 且$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$，$1\leqslant i\leqslant k$.

证明($\Leftarrow$)由定理 7(5).

($\Rightarrow$)参阅[Palais, R. S. *and* Terng, C. L. 1.4.2. Theorem].

#

定理 12 设M为n维C^∞流形. E为M上秩k的C^∞**分布**(即E为TM的秩k的C^∞子丛),则

(1) E对[,]是封闭的(即对任何$X, Y\in C^\infty(E)$有$[X, Y]\in C^\infty(E)$);$\Leftrightarrow$(2)对任何$p\in M$,存在p的开邻域U中的k个局部C^∞切向量场$X_1, \cdots, X_k$使得$x\in U$的纤维E_x是由$\{X_1(x), \cdots, X_k(x)\}$张成的,且在$U$上,$\{X_1(x), \cdots, X_k(x)\}$对[,]是封闭的(即

$$[X_i, X_j]=\sum_{l=1}^{k} f_{ijl}X_l, f_{ijl}\in C^\infty(U, \boldsymbol{R}));$$

$\Longleftrightarrow$(3) 对任何$p\in M$,存在p的局部坐标系(U, φ),$\{x^i\}$使得

$$N=\{q\in U\mid x^{k+1}(q)=c^{k+1}, \cdots, x^n(q)=c^n\}$$

为E的**积分子流形**(即$T_xN=E_x$, $x\in N$或$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$张成$E_x$).

证明 参阅[徐森林 172页—180页]. #

注 4 定理 12 中,(1)$\Rightarrow$(3) 或 (2)$\Rightarrow$(3) 称为 **Frobenius 定理**.

第三章　外微分形式和Stokes定理

第二章引进的切空间和切丛将使更多的代数构造渗入流形，从而使流形进一步代数化.

§1讨论张量丛和C^k张量场，证明了C^∞张量场$=C^\infty$场张量. §2研究C^∞反称协变张量场即C^∞外微分形式 外微分运算，并介绍将微分拓扑和代数拓扑密切相连的著名的de Rham定理 列举的一些例子与数学分析紧密相关而且是很有趣的. §3根据向量丛的定向，用n维C^∞流形切丛的定向性作为流形$(M,\mathscr{D})$的定向性. 对于定向流形$\vec{M}$，利用单位分解可定义n次C^∞外微分形式ω在n维C^∞定向仿紧流形上的积分$\int_{\vec{M}}\omega$. 引进M的$n-1$维C^∞边界流形∂M的诱导定向流形$\overrightarrow{\partial M}$以后，我们就可得到极其重要的Stokes定理 $\int_{\vec{M}}d\omega=\int_{\overrightarrow{\partial M}}I^*\omega$.

§1　张量丛和C^∞张量场

在第二章§2例7中已提到了一个向量空间的对偶空间，这一节将详细讨论它，并引进张量，张量丛和C^k张量场等概念和证明有关性质.

定义1　设V为n维实向量空间，令$V^*=\{\theta\mid\theta:V\to\mathbf{R}$为线性函数$\}$. 如果$\theta,\eta\in V^*,\lambda\in\mathbf{R}$，我们定义$(\theta+\eta)(X)=\theta(X)+\eta(X)$，$(\lambda\theta)(X)=\lambda\theta(X)$，$X\in V$，显然，$\theta+\eta$，$\lambda\theta:V\to\mathbf{R}$为线性函数，则$\theta+\eta,\lambda\theta\in V^*$. 易证$\{V^*,+,$数乘$\}$为$\mathbf{R}$上的向量空间，称为$V$的**对偶空间**，称$\theta\in V^*$为**协变(或余)向量**，称$X\in V$为**逆变向量**.

定理 1 设$\{e_i | i=1, \cdots, n\}$为V的一个基，$e^i: V \to \mathbf{R}$，$e^i \in V^*$，且$e^i(e_j)=\delta^i_j$，则$\{e^i | i=1,\cdots,n\}$为V^*的一个基，称为$\{e_i | i=1,\cdots, n\}$的一个**对偶基**.

证明 设 $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^i = 0, \lambda_i \in \mathbf{R}, i=1,\cdots,n$，则

$$0=\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e^i\right)(e_j)=\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta^i_j=\lambda_j,\ j=1,\cdots,n,$$

故$\{e^i | i=1,\cdots,n\}$是线性无关的.

此外，对任何$\theta \in V^*$，因为$\left(\sum_{i=1}^n \theta(e_i)e^i\right)(e_j)=\sum_{i=1}^n \theta(e_i)\delta^i_j=\theta(e_j)$，所以$\theta=\sum_{i=1}^n \theta(e_i)e^i$. 这就证明了$\{e^i | i=1,\cdots,n\}$为$V^*$的一个基，从而$V^*$为$n$维向量空间. #

设$\{\bar{e}_i | i=1,\cdots,n\}$为$V$的另一个基，它的对偶基为$\{\bar{e}^i | i=1,\cdots,n\}$，基变换公式为$\bar{e}_i=\sum_{j=1}^n c^j_i e_j$，$e_i=\sum_{j=1}^n d^j_i \bar{e}_j$，即

$$\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \vdots \\ \bar{e}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c^1_1 & \cdots & c^n_1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c^1_n & \cdots & c^n_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d^1_1 & \cdots & d^n_1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d^1_n & \cdots & d^n_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \vdots \\ \bar{e}_n\end{pmatrix},$$

分别记上述矩阵为C和D，显然$C=D^{-1}$.

设$X \in V$，则

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}^j \bar{e}_j = X = \sum_{i=1}^n a^i e_i = \sum_{i=1}^n a^i \sum_{j=1}^n d^j_i \bar{e}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n d^j_i a^i\right)\bar{e}_j,$$

$$\bar{a}^j=\sum_{i=1}^n d^j_i a^i,$$

$$\begin{pmatrix}\bar{a}^1\\ \vdots\\ \bar{a}^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1^1 & \cdots & d_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_1^n & \cdots & d_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix},$$

此矩阵为 D'.

令 $$\bar{e}^i=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^i e^k,\ 则$$

$$\delta_j^i=\bar{e}^i(\bar{e}_j)=\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^i e^k\right)\left(\sum_{l=1}^{n}c_j^l e_l\right)$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}\lambda_k^i c_j^l \delta_l^k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^j c_j^k,$$

即

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^1 & \cdots & \lambda_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^n & \cdots & \lambda_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1^1 & \cdots & c_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_1^n & \cdots & c_n^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

故 $(\lambda_j^i)'=C'^{-1}=D'$，$\lambda_j^i=d_j^i$，$\bar{e}^i=\sum_{j=1}^{n}d_j^i e^j$，于是对偶基变换公式

为

$$\begin{pmatrix}\bar{e}^1\\ \vdots\\ \bar{e}^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1^1 & \cdots & d_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_1^n & \cdots & d_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^1\\ \cdots\\ e^n\end{pmatrix},$$

此矩阵为 D'.

设 $\theta\in V^*$，则

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{\theta}_j\bar{e}^j=\theta=\sum_{i=1}^{n}\theta_i e^i=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\sum_{j=1}^{n}c_j^i\bar{e}^j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}c_j^i\theta_i\right)\bar{e}^j,$$

$\theta_i=\theta(e_i)$，$\bar{\theta}_j=\theta(\bar{e}_j)$，$\bar{\theta}_j=\sum_{i=1}^{n}c_j^i\theta_i$，

$$\begin{pmatrix}\bar{\theta}_1\\ \vdots\\ \bar{\theta}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1^1 & \cdots & c_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_n^1 & \cdots & c_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_n\end{pmatrix},$$

此矩阵为 $C=D^{-1}$，而 $\{\theta_i\}$ 和 $\{\bar{\theta}_i\}$ 分别称为协变向量关于基 $\{e_i \mid i=1,\cdots,n\}$，$\{e^i \mid i=1,\cdots,n\}$ 和 $\{\bar{e}_i \mid i=1,\cdots,n\}$，$\{\bar{e}^i \mid i=1,\cdots,n\}$ 的**分量**. 由此可仿照古典切向量的定义给出协变(切)向量的定义.

定义 2 设映射

$$\theta:\ \underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s\text{个}}\to \mathbf{R}$$

为偏线性的，即对任何 $W_i, U_i\in V^*, X_j, Y_j\in V, \lambda, \mu\in\mathbf{R}$ 有

$$\begin{aligned}&\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\lambda W_i+\mu U_i,W_{i+1},\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\\=&\lambda\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},W_i,W_{i+1},\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\\&+\mu\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},U_i,W_{i+1},\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s),\\&\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_{j-1},\lambda X_j+\mu Y_j,X_{j+1},\cdots,X_s)\\=&\lambda\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_{j-1},X_j,X_{j+1},\cdots,X_s)\\&+\mu\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_{j-1},Y_j,X_{j+1},\cdots,X_s),\end{aligned}$$

则称 θ 为 V 上的 **(r,s) 型张量**，r 为其**逆变阶数**，s 为其**协变阶数**. $(r,0)$ 型张量称为 **r 阶逆变张量**，$(1,0)$ 型张量就是逆变向量；$(0,s)$ 型张量称为 **s 阶协变张量**，$(0,1)$ 型张量就是协变向量；当 $r,s>0$ 时，(r,s) 型张量称为**混合张量**；为方便和统一，规定实数为 $(0,0)$ 型张量.

设 $\{e_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 为 V 的基，$\{e^i \mid i=1,\cdots,n\}$ 为 V^* 的基，且为 $\{e_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 的对偶基. 令 $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta(e^{i_1},\cdots,e^{i_r};e_{j_1},\cdots,e_{j_s})$，称 n^{r+s} 个数 $(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$ 为 θ 关于基 $\{e_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 的**分量**.

如果 $\{\bar{e}_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 为 V 的另一基，$\{\bar{e}^i \mid i=1,\cdots,n\}$ 为 $\{\bar{e}_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 的对偶基，则分量变换公式为

$$\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta(\bar{e}^{i_1},\cdots,\bar{e}^{i_r};\bar{e}_{j_1},\cdots,\bar{e}_{j_s})$$

$$=\theta\left(\sum_{k_1=1}^{n}d_{k_1}^{i_1}e^{k_1},\cdots,\sum_{k_r=1}^{n}d_{k_r}^{i_r}e^{k_r};\sum_{l_1=1}^{n}c_{j_1}^{l_1}e_{l_1},\cdots,\sum_{l_s=1}^{n}c_{j_s}^{l_s}e_{l_s}\right)$$

$$=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\l_1,\cdots,l_s=1}}^{n}d_{k_1}^{i_1}\cdots d_{k_r}^{i_r}c_{j_1}^{l_1}\cdots c_{j_s}^{l_s}\theta_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}.$$

逆变向量和协变向量的分量变换公式恰是这公式的两个特例.

另一个特例是双（偏）线性函数 $\theta:V\times V\to\mathbf{R}$. 设 $\{e_i|i=1,\cdots,n\}$ 为 V 的一个基, $\{\bar{e}_i|i=1,\cdots,n\}$ 为 V 的另一基. $\theta_{ij}=\theta(e_i,e_j)$, $\bar{\theta}_{ij}=\theta(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$. 对任何 $X,Y\in V$,

$$\theta(X,Y)=\theta\left(\sum_{i=1}^{n}a^ie_i,\ \sum_{j=1}^{n}b^je_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\theta_{ij}a^ib^j$$

$$=(a^1,\cdots,a^n)\begin{pmatrix}\theta_{11}&\cdots&\theta_{1n}\\\cdots&&\\\theta_{n1}&\cdots&\theta_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^1\\\vdots\\b^n\end{pmatrix},$$

$$\bar{\theta}_{ij}=\sum_{k,l=1}^{n}c_i^kc_j^l\theta_{kl},$$

$$(\bar{\theta}_{ij})=C(\theta_{ij})C',$$

于是矩阵$(\bar{\theta}_{ij})$与(θ_{ij})是相合的.

由张量的分量变换公式和切向量的古典定义方法立即可给出古典张量的定义.

定义 3 设$\otimes^{r,s}V$ 为所有(r,s)型张量的全体, 而 $\otimes^{1,0}V=V$, $\otimes^{0,1}V=V^*$, $\otimes^{0,0}V=\mathbf{R}$. 对于 $\theta,\eta\in\otimes^{r,s}V,\lambda\in\mathbf{R}$, 我们定义

$$(\theta+\eta)(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)=\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots X_s)$$
$$+\eta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s),$$
$$(\lambda\theta)(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)$$
$$=\lambda\cdot\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s),$$

其中 $W_i\in V^*,X_j\in V$. 显然, $\theta+\eta,\lambda\theta\in\otimes^{r,s}V$ 则 $\{\otimes^{r,s}V,+,$数乘$\}$

形成一个向量空间，称为关于 V 的 (r,s) 型**张量空间**.

易见，$\theta+\eta$ 和 $\lambda\theta$ 关于基 $\{e_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 的分量为

$$(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}+\eta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}) \text{ 和 } (\lambda\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$$

定义 4 设 $\theta\in\otimes^{r_1,s_1}V$，$\eta\in\otimes^{r_2,s_2}V$，我们定义**张量积**

$$\otimes:\otimes^{r_1,s_1}V\times\otimes^{r_2,s_2}V\to\otimes^{r_1+s_1,r_2+s_2}V$$

$$(\theta,\eta)\longmapsto\theta\otimes\eta,$$

$$(\theta\otimes\eta)(W_1,\cdots,W_{r_1+r_2};X_1,\cdots,X_{s_1+s_2})$$
$$=\theta(W_1,\cdots,W_{r_1};X_1,\cdots,X_{s_1})$$
$$\cdot\eta(W_{r_1+1},\cdots,W_{r_1+r_2};X_{s_1+1},\cdots,X_{s_1+s_2}),$$

其中 $W_i\in V^*$，$X_j\in V$. 显然，$\theta\otimes\eta\in\otimes^{r_1+r_2,s_1+s_2}V$，且 $\theta\otimes\eta$ 的分量为

$$(\theta\otimes\eta)^{i_1\cdots i_{r_1+r_2}}_{j_1\cdots j_{s_1+s_2}}=\theta^{i_1\cdots i_{r_1}}_{j_1\cdots j_{s_1}}\cdot\eta^{i_{r_1+1}\cdots i_{r_1+r_2}}_{j_{s_1+1}\cdots j_{s_1+s_2}}.$$

从定义 4 立即得到

$$(\theta_1+\theta_2)\otimes\eta=\theta_1\otimes\eta+\theta_2\otimes\eta,$$
$$\theta\otimes(\eta_1+\eta_2)=\theta\otimes\eta_1+\theta\otimes\eta_2,$$
$$(\lambda\theta)\otimes\eta=\theta\otimes(\lambda\eta)=\lambda(\theta\otimes\eta),\quad\lambda\in\mathbf{R},$$
$$(\theta\otimes\eta)\otimes\xi=\theta\otimes(\eta\otimes\xi),\quad\text{记作 }\theta\otimes\eta\otimes\xi.$$

但是，$\theta\otimes\eta=\eta\otimes\theta$ 不一定成立. 例如：令 $\theta(e_i)=1$，$i=1,\cdots,n$；

$\eta(e_i)=\begin{cases}1, i=1,\\2, i=2,\\0, i\geqslant3,\end{cases}$ 则 $(\theta\otimes\eta)(e_1,\ e_2)=\theta(e_1)\eta(e_2)=1\cdot2=2$，而

$(\eta\otimes\theta)(e_1,e_2)=\eta(e_1)\theta(e_2)=1$，从而 $\theta\otimes\eta\neq\eta\otimes\theta$.

定义 5 设 $\otimes V=\bigoplus\limits_{r,s=0}^{\infty}\otimes^{r,s}V=\left\{\sum\limits_{r,s=0}^{\infty}K^{r,s}\mid K^{r,s}\in\otimes^{r,s}V\right.$，且除有限个 $K^{r,s}$ 外全为 $0\}$，它为 $\otimes^{r,s}V$，r，$s\geqslant0$ 的弱直和. 于是，易见

$$\{\otimes V=\bigoplus_{r,s=0}^{\infty}\otimes^{r,s}V,\text{数乘},+,\otimes\}$$

关于数乘和加法形成一个向量空间，关于加法和$\otimes$形成一个环($\otimes$不可交换)，则它为实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的一个代数，称为关于V的**张量代数**. 而$\{\bigoplus_{s=0}^{\infty}\otimes^{0,s}V,\text{数乘},+,\otimes\}$ 形成此张量代数的一个子代数.

定理 2 设$\{e_i\,|\,i=1,\cdots,n\}$为n维向量空间V的一个基；$\{e^i\,|\,i=1,\cdots,n\}$为V^*的一个基，且为$\{e_i\,|\,i=1,\cdots,n\}$的对偶基，$\{e_i^{**}\,|\,i=1,\cdots,n\}$为$V^{**}$的一个基，它是$\{e^i\,|\,i=1,\cdots,n\}$的对偶基. 则

$\{e_{i_1}^{**}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}^{**}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\,|\,1\leqslant i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\leqslant n\}$ 为$\otimes^{r,s}V$ 的一个基，因而$\otimes^{r,s}V$ 为 n^{r+s} 维向量空间. 此外，$\theta\in\otimes^{r,s}V$ 可表示为

$$\theta=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}^{**}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}^{**}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}.$$

证明 设 $\displaystyle\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\lambda_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}^{**}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}^{**}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}=0,$

则
$$\begin{aligned}0&=0(e^{k_1},\cdots,e^{k_r};e_{l_1},\cdots,e_{l_s})\\&=\left(\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\lambda_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}^{**}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}^{**}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\right)\\&\quad\cdot(e^{k_1},\cdots,e^{k_r};e_{l_1},\cdots,e_{l_s})\\&=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\lambda_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\delta_{i_1}^{k_1}\cdots\delta_{i_r}^{k_r}\delta_{l_1}^{j_1}\cdots\delta_{l_s}^{j_s}=\lambda_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r},\end{aligned}$$

$$1\leqslant k_1,\cdots,k_r,l_1,\cdots,l_s\leqslant n,$$

从而$\{e_{i_1}^{**}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}^{**}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\,|\,1\leqslant i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\leqslant n\}$是

线性无关的.

对于任何 $\theta\in\otimes^{r,s}V$，因为

$$\left(\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}e^{**}_{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{**}_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\right)$$

$$\cdot(e^{k_1},\cdots,e^{k_r};e_{l_1},\cdots,e_{l_s})$$

$$=\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}=\theta(e^{k_1},\cdots,e^{k_r};e_{l_1},\cdots,e_{l_s}),$$

故 $\theta=\sum\limits_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}e^{**}_{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{**}_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}.$

综上所述，$\{e^{**}_{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{**}_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\mid 1\leqslant i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\leqslant n\}$ 为 $\otimes^{r,s}V$ 的一个基． #

定义 6 设 V_i 为 n_i 维向量空间，$i=1,2$，由线性映射 $\mathscr{A}:V_1\to V_2$ 诱导协变张量之间的映射

$$\mathscr{A}^*:\otimes^{0,s}V_2\to\otimes^{0,s}V_1,\quad \theta\mapsto\mathscr{A}^*\theta,$$

$$(\mathscr{A}^*\theta)(X_1,\cdots,X_s)=\theta(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_s),\ X_1,\cdots,X_s\in V_1,$$

其中 $\mathscr{A}^*\theta\in\otimes^{0,s}V_1$ 是由于$\mathscr{A}$线性和 θ 的偏线性．因为

$$\mathscr{A}^*(\lambda\theta_1+\mu\theta_2)(X_1,\cdots,X_s)=(\lambda\theta_1+\mu\theta_2)(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_s)$$

$$=\lambda\theta_1(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_s)+\mu\theta_2(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_s)$$

$$=(\lambda\mathscr{A}^*\theta_1+\mu\mathscr{A}^*\theta_2)(X_1,\cdots,X_s),$$

故 $\mathscr{A}^*(\lambda\theta_1+\mu\theta_2)=\lambda\mathscr{A}^*\theta_1+\mu\mathscr{A}^*\theta_2,$

$\theta_1,\theta_2\in\otimes^{0,s}V_2,\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，即$\mathscr{A}^*$ 是线性的.

定理 3 设 V,V_1,V_2,V_3 分别为 n,n_1,n_2,n_3 维向量空间．$\mathscr{A}:V_1\to V_2$，$\mathscr{B}:V_2\to V_3$ 为线性映射．则

(1) $\mathscr{A}^*(\theta_1\otimes\theta_2)=\mathscr{A}^*\theta_1\otimes\mathscr{A}^*\theta_2$，$\theta_1\in\otimes^{0,r}V_2,\theta_2\in\otimes^{0,s}V_2$；

(2) $(\mathrm{Id}_V)^*=\mathrm{Id}_{\otimes^{0,s}V}$；

(3) $(\mathscr{B}\mathscr{A})^*=\mathscr{A}^*\mathscr{B}^*$；

(4) 设$\{e_i\mid i=1,\cdots,n_1\}$为$V_1$ 的基，$\{e^i\mid i=1,\cdots,n_1\}$为其对偶

基，$\{\eta_j | j=1,\cdots,n_2\}$ 为 V_2 的基，$\{\eta^j | j=1,\cdots, n_2\}$ 为其对偶基，$\mathscr{A} e_l=\sum_{i=1}^{n_2} d_l^i \eta_i$. 则 $\mathscr{A}^* \eta^j=\sum_{i=1}^{n_1} d_i^j e^i$，且对 $\theta=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2} \theta_{j_1\cdots j_s} \eta^{j_1} \otimes\cdots\otimes \eta^{j_s}$，有

$$\mathscr{A}^*\theta=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n_1}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2} d_{i_1}^{j_1}\cdots d_{i_s}^{j_s}\theta_{j_1\cdots j_s}\right)e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s}.$$

(5) 如果 $\mathscr{A}:V_1\to V_2$ 为线性同构，$\mathscr{A}^{-1}:V_2\to V_1$ 为其逆，它也是线性同构，则 $\mathscr{A}^{*-1}=(\mathscr{A}^{-1})^*$，$n_1=n_2=n$.

设 $\{e_i | i=1,\cdots,n\}$ 为 V_1 的基，$\{e^i | i=1,\cdots n\}$ 为其对偶基，$\{e_i^{**} | i=1,\cdots,n\}$ 为 $\{e^i | i=1,\cdots,n\}$ 的对偶基. 则 $\{\eta_i=\mathscr{A} e_i | i=1,\cdots,n\}$ 为 V_2 的一个基，$\{\eta^i | i=1,\cdots,n\}$ 为它的对偶基，$\{\eta_i^{**} | i=1,\cdots,n\}$ 为 $\{\eta^i | i=1,\cdots,n\}$ 的对偶基. 由线性同构 $\mathscr{A}:V_1\to V_2$ 诱导出张量之间的映射

$$\mathscr{A}^*:\otimes^{r,s}V_2\to\otimes^{r,s}V_1,\quad \theta\mapsto\mathscr{A}^*\theta,$$

$$(\mathscr{A}^*\theta)(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)=\theta(\mathscr{A}^{*-1}W_1,\cdots,\mathscr{A}^{*-1}W_r;\ \mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_s),$$

其中 $\mathscr{A}^*\theta\in\otimes^{r,s}V_1$ 是由 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}^{*-1}$ 线性和 θ 的偏线性得到. 类似定义 6，$\mathscr{A}^*$ 是线性的. 则 $\mathscr{A}^*\eta^i=e^i$，$\mathscr{A}^*\eta_i^{**}=e_i^{**}$. 完全类似于(1)(2)(3)有

$$\mathscr{A}^*(\theta_1\otimes\theta_2)=\mathscr{A}^*\theta_1\otimes\mathscr{A}^*\theta_2,$$

$$(\mathrm{Id}_V)^*=\mathrm{Id}_{\otimes^{r,s}V},$$

$$(\mathscr{B}\mathscr{A})^*=\mathscr{A}^*\mathscr{B}^*,$$

$$(\mathscr{A}^*)^{-1}=(\mathscr{A}^{-1})^*.$$

此外，$\mathscr{A}^*:\otimes^{r,s}V_2\to\otimes^{r,s}V_1$ 为线性同构，且

$$\mathscr{A}^*\theta=\mathscr{A}^*\left(\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\eta_{i_1}^{**}\otimes\cdots\otimes\eta_{i_r}^{**}\otimes\eta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\eta^{j_s}\right)$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n} \theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} e^{**}_{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{**}_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}.$$

证明 (1) $\mathscr{A}^*(\theta_1\otimes\theta_2)(X_1,\cdots,X_{r+s})$

$$=(\theta_1\otimes\theta_2)(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_{r+s})$$

$$=\theta_1(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_r)\cdot\theta_2(\mathscr{A}X_{r+1},\cdots,\mathscr{A}X_{r+s})$$

$$=\mathscr{A}^*\theta_1(X_1,\cdots,X_r)\cdot\mathscr{A}^*\theta_2(X_{r+1},\cdots,X_{r+s})$$

$$=(\mathscr{A}^*\theta_1\otimes\mathscr{A}^*\theta_2)(X_1,\cdots,X_{r+s}),\ X_1,\cdots,X_{r+s}\in V_1,$$

故
$$\mathscr{A}^*(\theta_1\otimes\theta_2)=\mathscr{A}^*\theta_1\otimes\mathscr{A}^*\theta_2.$$

(2) $(\mathrm{Id}_V)^*\theta(X_1,\cdots,X_s)=\theta(\mathrm{Id}_VX_1,\cdots,\mathrm{Id}_VX_s)=\theta(X_1,\cdots,X_s)$, $X_1,\cdots,X_s\in V_1$, 故 $(\mathrm{Id}_V)^*\theta=\theta=\mathrm{Id}_{\otimes^{0,s}V}(\theta)$, 即 $(\mathrm{Id}_V)^*=\mathrm{Id}_{\otimes^{0,s}V}$

(3) $(\mathscr{B}\mathscr{A})^*\theta(X_1,\cdots,X_s)=\theta(\mathscr{B}\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{B}\mathscr{A}X_s)=\mathscr{B}^*\theta(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_s)=\mathscr{A}^*\mathscr{B}^*\theta(X_1,\cdots,X_s)$, $(\mathscr{B}\mathscr{A})^*=\mathscr{A}^*\mathscr{B}^*$.

(4) $$\mathscr{A}^*\eta^j(e_l)=\eta^j(\mathscr{A}e_l)=\eta^j\left(\sum_{i=1}^{n_1}d^i_l\eta_i\right)=\sum_{i=1}^{n_1}d^i_l\delta^j_i=d^j_l=\left(\sum_{i=1}^{n_1}d^j_ie^i\right)(e_l),\quad \text{故}\ \mathscr{A}^*\eta^j=\sum_{i=1}^{n_1}d^j_ie^i.$$

$$\mathscr{A}^*\theta=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2}\theta_{j_1\cdots j_s}\mathscr{A}^*\eta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathscr{A}^*\eta^{j_s}$$

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2}\theta_{j_1\cdots j_s}\left(\sum_{i_1=1}^{n_1}d^{j_1}_{i_1}e^{i_1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{i_s=1}^{n_1}d^{j_s}_{i_s}e^{i_s}\right).$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n_1}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2}d^{j_1}_{i_1}\cdots d^{j_s}_{i_s}\theta_{j_1\cdots j_s}\right)e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s}.$$

(5) 由(2)和(3), $\mathrm{Id}_{\otimes^{r,s}V_1}=(\mathrm{Id}_{V_1})^*=(\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A})^*=(\mathscr{A}^{-1})^*\mathscr{A}^*$,

同理有 $\mathrm{Id}_{\otimes^{r,s}V_2}=\mathscr{A}^*(\mathscr{A}^{-1})^*$, 故 $(\mathscr{A}^*)^{-1}=(\mathscr{A}^{-1})^*$.

$(\mathscr{A}^*\eta^i)(e_j)=\eta^i(\mathscr{A}e_j)=\eta^i(\eta_j)=\delta^i_j=e^i(e_j)$, 则 $\mathscr{A}^*\eta^i=e^i$.

$$(\mathscr{A}^*\eta_i^{**})(e^j)=\eta_i^{**}(\mathscr{A}^{*-1}e^j)=\eta_i^{**}(\eta^j)=\delta_i^j=e_i^{**}(e^j),$$

则$\mathscr{A}^*\eta_i^{**}=e_i^{**}$.　　#

定义 7　设$\xi=\{E,\ M,\ \pi,\ \mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\ \boldsymbol{R}^m,\ \mathscr{E}\}$为$C^k$向量丛. 令

$$\bigotimes^{r,s}E=\bigcup_{x\in M}\bigotimes^{r,s}E_x,$$

其中$\bigotimes^{r,s}E_x=\{\theta|\theta$为向量空间$E_x$的$(r,s)$型张量$\}$; 投影$\pi_1$: $\bigotimes^{r,s}E\to M$, 使得$\pi_1|_{\bigotimes^{r,s}E_x}=x$, $x\in M$ (第二章§2例7为特例, $E^*=\bigotimes^{0,1}E$). 记

$$(\mathscr{E}_1^{r,s})'=\{(\pi_1^{-1}(U_\alpha),(\psi_\alpha^*)^{-1})|(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{E}\},$$

而$\pi_1^{-1}(U_\alpha)\overset{\psi_\alpha^*}{\longleftarrow}U_\alpha\times\bigotimes^{r,s}\boldsymbol{R}^m\cong U_\alpha\times\boldsymbol{R}^{m^{r+s}}$定义如下 (参阅定义和定理 3):

$$\{x\}\times\boldsymbol{R}^m\xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}|_x}E_x\xrightarrow{\psi_\beta|_x}\{x\}\times\boldsymbol{R}^m,$$

$$\begin{array}{ccccc}\{x\}\times\bigotimes^{r,s}\boldsymbol{R}^m & \xleftarrow{(\psi_\alpha^{-1}|_x)^*=(\psi_\alpha^*|_x)^{-1}} & \bigotimes^{r,s}E_x & \xleftarrow{(\psi_\beta|_x)^*} & \{x\}\times\bigotimes^{r,s}\boldsymbol{R}^m\\ \wr\| & & & & \wr\|\\ \{x\}\times\boldsymbol{R}^{m^{r+s}} & & & & \{x\}\times\boldsymbol{R}^{m^{r+s}}.\end{array}$$

这里, $(x,b)=\psi_\beta|_x\circ\psi_\alpha^{-1}|_x(x,a)=(x,g_{\beta\alpha}(x)a)$, $g_{\beta\alpha}(x):\boldsymbol{R}^m\longrightarrow\boldsymbol{R}^m$为线性同构. 设$\mathscr{A}$为相应于矩阵$g_{\beta\alpha}(x)$的线性同构, $\{e_i|i=1,\cdots,m\}$为$\boldsymbol{R}^m$的一个基, $\{e^i|i=1,\cdots,m\}$为$\{e_i|i=1,\cdots,m\}$的对偶基, $\{e_i^{**}|i=1,\cdots,m\}$为$\{e^i|i=1,\cdots,m\}$的对偶基. 则$\{\mathscr{A}e_i=\eta_i|i=1,\cdots,m\}$也为$R^m$的一个基, 设$\{\eta^i|i=1,\cdots,m\}$为$\{\eta_i|i=1,\cdots,m\}$的对偶基, 而$\{\eta_i^{**}|i=1,\cdots,m\}$为$\{\eta^i|i=1,\cdots,m\}$的对偶基. 根据定理 3, $\mathscr{A}^*\eta^i=e^i$, $\mathscr{A}^*\eta_i^{**}=e_i^{**}$. 令

$$\begin{pmatrix}\mathscr{A}e_1\\ \vdots\\ \mathscr{A}e_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1^1 & \cdots & d_1^m\\ \cdots & & \\ d_m^1 & \cdots & d_m^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix},$$

则
$$\sum_{j=1}^{m} b^j e_j = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{m} a^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a^i \sum_{j=1}^{m} d_i^j e_j$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} d_i^j a^i\right) e_j,$$
$$\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_m^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_1^m & \cdots & d_m^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}, \quad g_{\mathscr{A} x}(x) = \begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_m^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_1^m & \cdots & d_m^m \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_m^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_1^m & \cdots & d_m^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1^{**} \\ \vdots \\ e_m^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_1^m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m^1 & \cdots & c_m^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1^{**} \\ \vdots \\ \eta_m^{**} \end{pmatrix}.$$
于是，
$$\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{m} \theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} e_{i_1}^{**} \otimes\cdots\otimes e_{i_r}^{**} \otimes e^{j_1} \otimes\cdots\otimes e^{j_s}$$
$$= \mathscr{A}^*\left(\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{m} \bar{\theta}_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r} e_{k_1}^{**} \otimes\cdots\otimes e_{k_r}^{**} \otimes e^{l_1} \otimes\cdots\otimes e^{l_s}\right)$$
$$= \mathscr{A}^*\left(\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{m} \bar{\theta}_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}\left(\sum_{i_1=1}^{m} c_{k_1}^{i_1} \eta_{i_1}^{**}\right) \otimes\cdots\right.$$
$$\left.\otimes\left(\sum_{i_r=1}^{m} c_{k_r}^{i_r} \eta_{i_r}^{**}\right) \otimes \left(\sum_{j_1=1}^{m} d_{j_1}^{l_1} \eta^{j_1}\right) \otimes\cdots\otimes\left(\sum_{j_s=1}^{m} d_{j_s}^{l_s} \eta^{j_s}\right)\right)$$
$$= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{m}\left(\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,j_s=1}}^{m} c_{k_1}^{i_1}\cdots c_{k_r}^{i_r} d_{j_1}^{l_1}\cdots d_{j_s}^{l_s} \bar{\theta}_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}\right)$$
$$\cdot e_{i_1}^{**} \otimes\cdots\otimes e_{i_r}^{**} \otimes e^{j_1} \otimes\cdots\otimes e^{j_s},$$
$$\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{m} c_{k_1}^{i_1}\cdots c_{k_r}^{i_r} d_{j_1}^{l_1}\cdots d_{j_s}^{l_s} \bar{\theta}_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r}$$
或

$$\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{m} d^{i_1}_{k_1}\cdots d^{i_r}_{k_r} c^{l_1}_{j_1}\cdots c^{l_s}_{j_s}\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}.$$

显然这表示为$\otimes^{r,s}\boldsymbol{R}^m \to \otimes^{r,s}\boldsymbol{R}^m$的线性同构，相应的矩阵$\in \mathrm{GL}((m^{r+s}, \boldsymbol{R})$. 设$\mathscr{E}^{r,s}$为由$(\mathscr{E}^{r,s})'$唯一确定的$\otimes^{r,s}E$的从图册，则称

$$\otimes^{r,s}\xi = \{\otimes^{r,s}E, M, \pi_1, \mathrm{GL}(m^{r+s}, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^{m^{r+s}}, \mathscr{E}^{r,s}\}$$

为ξ的(r,s)型的C^k张量丛.

注 1 如果令$X_{ix} = \psi_\alpha^{-1}|_x(e_i)$, $Y_{ix} = \psi_\beta^{-1}|_x(e_i)$，则$\{X_{ix}|i=1,\cdots,m\}$和$\{Y_{ix}|i=1,\cdots,m\}$为$E_x$的两个基. 从上面容易看出$E_x$上同一个$(r, s)$型张量$\theta$分别关于基$\{X_{ix}|i=1,\cdots,m\}$和$\{Y_{ix}|i=1,\cdots,m\}$的分量$(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$和$(\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$之间的关系就是上面已得到的关系. 因此，今后类似的情形，按后面的观点论述要方便得多.

$$\begin{pmatrix} Y_{1x} \\ \vdots \\ Y_{mx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1_1 & \cdots & c^m_1 \\ \cdots & & \\ c^1_m & \cdots & c^m_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1x} \\ \vdots \\ X_{mx} \end{pmatrix},$$

则
$$\sum_{j=1}^m b^j Y_{jx} = X_x = \sum_{i=1}^m a^i X_{ix} = \sum_{i=1}^m a^i \sum_{j=1}^m d^j_i Y_{jx}$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m d^j_i a^i \right) Y_{jx}, \quad b^j = \sum_{i=1}^m d^j_i a^i,$$

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^1_1 & \cdots & d^1_m \\ \cdots & & \\ d^m_1 & \cdots & d^m_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}, \quad g_{\beta\alpha}(x) = \begin{pmatrix} d^1_1 & \cdots & d^1_m \\ \cdots & & \\ d^m_1 & \cdots & d^m_m \end{pmatrix}.$$

如果$\{X^i_x|i=1,\cdots,m\}$为$\{X_{ix}|i=1,\cdots,m\}$的对偶基，$\{Y^i_x|i=1,\cdots,m\}$为$\{Y_{ix}|i=1,\cdots,m\}$的对偶基. 于是，E_x上的(r, s)型张量θ关于基$\{X_{ix}|i=1,\cdots,m\}$的分量$(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$和关于基$\{Y_{ix}|$

$i=1,\cdots,m\}$的分量$(\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$之间的变换公式为

$$\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\l_1,\cdots,l_s=1}}^{m} d^{i_1}_{k_1}\cdots d^{i_r}_{k_r}c^{l_1}_{j_1}\cdots c^{l_s}_{j_s}\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}.$$

其中d^i_k和c^l_j为$U_\alpha\cap U_\beta$上的C^k函数．反之，如果C^k向量丛ξ满足本注的各条件，它就唯一确定了一个张量丛．

定义 8 设$\otimes^{r,s}\xi$为与C^l向量丛ξ相联系的(r,s)型C^l张量丛，$U\subset M$．称截面

$$\theta:U\longrightarrow\otimes^{r,s}E=\bigcup_{x\in M}\otimes^{r,s}E_x,\ x\longmapsto\theta_x$$

为U上的(r,s)型张量场，U称为它的定义域．如果θ为C^0(连续)截面，则称它为U上的(r,s)型C^0(连续)张量场；如果$U\subset M$为开集，称U上的$C^k(1\leqslant k\leqslant l)$截面$\theta$为$U$上的$(r,s)$型$C^k$张量场，其全体记为$C^k(\otimes^{r,s}E|_U)$.

我们特别感兴趣的是与n维C^∞流形$(M,\mathscr{D})$的切丛$\xi=\{TM,M,\pi,\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^n\}$相联系的$(r,s)$型$C^\infty$张量丛$\otimes^{r,s}\xi=\{\otimes^{r,s}TM=\bigcup\limits_{p\in M}\otimes^{r,s}T_pM,M,\pi_1,\ \mathrm{GL}(n^{r+s},\boldsymbol{R}),\ \boldsymbol{R}^{n^{r+s}}\}$．此时，$X_{ip}=\psi_\alpha^{-1}|_p(e_i)=\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$，$Y_{ip}=\psi_\beta^{-1}|_p(e_i)=\left.\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$，而$\otimes^{r,s}T_pM=\{\theta|\theta$为$p$点的切空间$T_pM$上的$(r,s)$型张量$\}$，投影$\pi_1:\otimes^{r,s}TM\to M$，使得$\pi_1|_{\otimes^{r,s}T_pM}=p,p\in M$．由

$$\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial}{\partial y^1}\right|_p\\ \vdots\\ \left.\dfrac{\partial}{\partial y^n}\right|_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1}&\cdots&\dfrac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n}&\cdots&\dfrac{\partial x^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{\varphi_\beta(p)}\begin{pmatrix}\left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_p\\ \vdots\\ \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\end{pmatrix}$$

和$\displaystyle\sum_{j=1}^n b^j\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p=X_p=\sum_{i=1}^n a^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$得到

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} g_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)},$$

记 T_pM 的对偶空间为 T_p^*M，称为**余切空间**，它的元素称为**余切向量**. $T^*M=\bigcup\limits_{p\in M}T_p^*M$ 称为**余切丛**，它是切丛 TM 的对偶丛.

设$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \middle| i=1,\cdots,n\right\}$的对偶基为 $\{dx^i|_p|i=1,\ \cdots,\ n\}$，$\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p \middle| i=1,\cdots,n\right\}$的对偶基为$\{dy^i|_p|i=1,\cdots,n\}$. 于是，$T_pM$ 上的(r,s)型张量 θ 关于基$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \middle| i=1,\ \cdots,\ n\right\}$的分量$(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$和关于基$\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p \middle| i=1,\cdots,n\right\}$的分量$(\bar\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$之间的变换公式为

$$\bar\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{n}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s},$$

其中$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$和$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$分别为 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$和 $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$上的 C^∞ 函数.

在局部坐标系$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$中，$\theta\in\otimes^{r,s}TM$ 可表示为

$$\theta=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}^{**}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}^{**}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}.$$

定理 4 设$(M,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 流形，则

(1) θ 为M上的$(r,\ s)$型 $C^k(0\leqslant k\leqslant\infty)$张量场$\Longleftrightarrow$对任何$(U,\ \varphi)$，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，$\theta_p=\sum\limits_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(p)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}^{**}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}^{**}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$，$p\in U$，有 $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\in C^k(U,\mathbf{R})$.

(2) θ 为M上的$(r,\ s)$型 C^∞ 张量场$\Longleftrightarrow$对M上的任何 C^∞ 协

变切向量场 $W_1,\cdots,W_r$ 和 C^∞ 逆变切向量场 $X_1,\cdots,X_s$, $\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)$ 为M上的 C^∞ 函数.

证明 (1) $\theta: M\to\otimes^{r,s}TM$ 为 C^k 类映射 $\Longleftrightarrow$ 对任何(U,φ), $\{x^i\}\in\mathscr{D}$, $x\longmapsto(x;(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\circ\varphi^{-1}(x))$ 是 C^k 类的 $\Longleftrightarrow$ 对任何 (U,φ), $\{x^i\}\in\mathscr{D}$, $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\in C^k(U,\boldsymbol{R})$.

(2) ($\Longrightarrow$)对任何(U,φ), $\{x^i\}\in\mathscr{D}$, 在U中

$$\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)$$

$$=\left(\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}^{**}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}^{**}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\right)$$

$$\left(\sum_{k_1=1}^{n}c_{k_1}dx^{k_1},\cdots,\sum_{k_r=1}^{n}c_{k_r}dx^{k_r},\right.$$

$$\left.\sum_{l_1=1}^{n}a^{l_1}\frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\cdots,\sum_{l_s=1}^{n}a^{l_s}\frac{\partial}{\partial x^{l_s}}\right)$$

$$=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{n}\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}c_{k_1}\cdots c_{k_r}a^{l_1}\cdots a^{l_s},$$

由题设和(1)知, $\theta^{k_1\cdots k_r}_{j_1\cdots j_s}, c_{k_1},\cdots,c_{k_r}, a^{l_1},\cdots,a^{l_s}\in C^\infty(U,\boldsymbol{R})$, 故

$\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)$为$M$上的 C^∞ 函数.

($\Longleftarrow$) 对任何 $p\in M$, 取(U,φ), $\{x^i\}\in\mathscr{D}$, 使 $p\in U$. 设

$$\theta=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta\left(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r};\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}^{**}\otimes\cdots$$

$$\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}^{**}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}.$$

利用第一章§3引理1构造 C^∞ 协变切向量场 $W_1,\cdots,W_n$ 和 C^∞ 逆变切向量场 $X_1,\cdots,X_s$, 使得 $W_i|_V=dx^i$, $X_i|_V=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i=1,\cdots,n$,

其中V为U中的开集. 于是在V中,

$$\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta\left(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r};\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)$$
$$=\theta(W_{i_1},\cdots,W_{i_r};X_{j_1},\cdots,X_{j_s})$$

是C^∞类的函数,由(1)可知θ为M上的(r,s)型C^∞张量场. #

定义 9 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形, $C^\infty(TM)$为M上C^∞向量场的全体,如果映射

$$\theta:\overbrace{C^\infty(TM)\times\cdots\times C^\infty(TM)}^{s\text{ 个}}\to C^\infty(M,\mathbf{R})$$

是偏线性的,即

$$\begin{aligned}&\theta(X_1,\cdots,X_{i-1},fX_i+gY_i,X_{i+1},\cdots,X_s)\\&=f\cdot\theta(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_s)+g\cdot\theta(X_1,\cdots,X_{i-1},Y_i,X_{i+1},\\&\quad\cdots,X_s),f,g\in C^\infty(M,\mathbf{R}),X_i,Y_i\in C^\infty(TM),\\&i=1,\cdots,s,\end{aligned}$$

则称θ为$(0,s)$型的C^∞**场张量**.

为了证明C^∞张量场和C^∞场张量在某种意义下是相同的,我们先证下面的引理.

引理 1 设$X_i,Y_i\in C^\infty(TM)$, $i=1,\cdots,s$, θ为$(0,s)$型C^∞场张量. 如果在开集U中, $X_i=Y_i$, $i=1,\cdots,s$, 则在U中有

$$\theta(X_1,\cdots,X_s)=\theta(Y_1,\cdots,Y_s).$$

证明 如果在U中, $X_1=0$,则在U中必有$\theta(X_1,\cdots,X_s)=0$. 事实上,对任何$y\in U$,作M上的C^∞函数f,使$f(y)=0$和$f|_{M-U}=1$. 则在M上, $X_1=fX_1$,因而$\theta(X_1,\cdots,X_s)|_y=\theta(fX_1,X_2,\cdots,X_s)|_y=f(y)\theta(X_1,\cdots,X_s)|_y=0\cdot\theta(X_1,\cdots,X_s)|_y=0$.

如果在U中, $X_1=Y_1$,则$X_1-Y_1=0$,于是$\theta(X_1,X_2,\cdots,X_s)-\theta(Y_1,X_2,\cdots,X_s)=\theta(X_1-Y_1,X_2,\cdots,X_s)=0$,即

$$\theta(X_1,X_2,\cdots,X_s)=\theta(Y_1,X_2,\cdots,X_s).$$

同理，$\theta(X_1,X_2,\cdots,X_s)=\theta(Y_1,X_2,\cdots,X_s)$

$$=\theta(Y_1,Y_2,X_3,\cdots,X_s)=\cdots=\theta(Y_1,Y_2,\cdots,Y_s). \quad \#$$

定理 5(张量场=场张量) 设$(M,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 流形，则M上的一个$(0,s)$型 C^∞ 张量场 θ 可以视作$(0,s)$型 C^∞ 场张量. 反之，一个$(0,s)$型 C^∞ 场张量 θ 也可视作M上的$(0,s)$型 C^∞ 张量场.

证明 (1) 设 θ 为$(0,s)$型 C^∞ 张量场，

$$\theta_p: \overbrace{T_pM\times\cdots\times T_pM}^{s\text{个}}\to \mathbf{R}$$

为偏线性函数，由定理 4，

$$\overbrace{C^\infty(TM)\times\cdots\times C^\infty(TM)}^{s\text{个}}\to C^\infty(M,\mathbf{R}),\ (X_1,\ \cdots,\ X_s)\longmapsto$$

$\theta(X_1,\cdots,X_s)$，$\theta(X_1,\cdots,X_s)|_p=\theta_p(X_{1p},\cdots,X_{sp})$为偏线性映射，故 θ 可视作$(0,s)$型 C^∞ 场张量.

(2) 相反地，如果

$$\theta: \overbrace{C^\infty(TM)\times\cdots\times C^\infty(TM)}^{s\text{个}}\to C^\infty(M,\mathbf{R})$$

为$(0,s)$型 C^∞ 场张量. 对每个 $p\in M$，由 θ 诱导出一个偏线性函数 $\theta_p: \overbrace{T_pM\times\cdots\times T_pM}^{s\text{个}}\to\mathbf{R}$ 如下：设 $e_1,\cdots,e_n\in T_pM$，任取 $X_1,\cdots,X_s\in C^\infty(TM)$，使 $X_1|_p=e_1,\ \cdots,\ X_s|_p=e_s$，令 $\theta_p(e_1,\ \cdots,\ e_n)=\theta(X_1,\cdots,X_s)|_p$，如果能证明这个定义与上述的 $X_1,\cdots,X_s$ 的选取无关，则 θ_p 是定义确切的，且明显为偏线性函数，从而它是 p 点处的$(0,s)$型张量.

设$X_1|_p=0$，在 p的局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$中，$X_1=\sum\limits_{i=1}^n a^i\cdot\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

我们构造M上的 C^∞ 向量场 Y_i 和C^∞ 函数 f^i，使得在 p 的开邻

域 $V\subset U$ 中，$Y_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$，$f^i=a^i$，$i=1,\cdots,n$. 则在 V_1 中 $X_1=\sum_{i=1}^{n}f^iY_i$ 且

$$\theta(X_1,\cdots,X_s)|_p=\theta\left(\sum_{i=1}^{n}f^iY_i,X_2,\cdots,X_s\right)|_p$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f^i(p)\theta(Y_i,X_2,\cdots,X_s)|_p$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a^i(p)\theta(Y_i,X_2,\cdots,X_s)|_p=0.$$

如果 $Y_1,\cdots,Y_s\in C^\infty(TM)$，$Y_1|_p=e_1,\cdots,Y_s|_p=e_s$，则 $(X_1-Y_1)|_p=0$，

$$\theta(X_1,X_2,\cdots,X_s)|_p-\theta(Y_1,X_2,\cdots,X_s)|_p$$

$$=\theta(X_1-Y_1,X_2,\cdots,X_s)|_p=0,\text{即}$$

$$\theta(X_1,X_2,\cdots,X_s)|_p=\theta(Y_1,X_2,\cdots,X_s)|_p,$$

同理，$\theta(X_1,X_2,\cdots,X_s)|_p=\theta(Y_1,Y_2,\cdots,X_s)|_p=\theta(Y_1,Y_2,X_3\cdots,X_s)|_p=\cdots=\theta(Y_1,\cdots,Y_s)|_p$，这就证明了 θ_p 的定义与 $X_1,\cdots,X_s$ 的选取无关. #

最后，讨论 M_2 上的 $(0,s)$ 型张量 θ 在 C^∞ 映射 $f:M_1\to M_2$ 下变为 $f^*\theta$ 的一些性质.

定理 6 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^∞ 流形，$f:M_1\to M_2$ 为 C^∞ 映射，$f_{*p}:T_pM_1\to T_{f(p)}M_2$ 为 f 的微分或 Jacobi 映射. 根据定义 6 和定理 3，由

$$f_p^*\theta(X_1,\cdots,X_s)$$

$$=\theta(f_{*p}X_1,\cdots,f_{*p}X_s),\ \theta\in\otimes^{0,s}T_{f(p)}M_2,\ X_i\in T_pM$$

定义的映射 $f_p^*:\otimes^{0,s}T_{f(p)}M_2\to\otimes^{0,s}T_pM_1$，$\theta\longmapsto f_p^*\theta$ 为线性映射且

$$f_p^*(\theta_1\otimes\theta_2)=f_p^*\theta_1\otimes f_p^*\theta_2,\ \theta_1\in\otimes^{0,r}T_{f(p)}M_2,\ \theta_2\in\otimes^{0,s}T_{f(p)}M_2.$$

此外，如果(U,φ)，$\{x^i\}$和$(V,\ \psi)$，$\{y^j\}$分别为p点和$f(p)$点的局部坐标系，则

$$f_p^*dy^j=\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\partial(y^j\circ f)}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}dx^i,\quad j=1,\cdots,n_2,$$

$$\begin{pmatrix} f_p^*dy^1\\ \vdots\\ f_p^*dy^{n_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial(y^1\circ f)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial(y^1\circ f)}{\partial x^{n_1}}\\ \cdots & & \\ \frac{\partial(y^{n_2}\circ f)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial(y^{n_2}\circ f)}{\partial x^{n_1}}\end{pmatrix}_{\varphi(p)}\begin{pmatrix} dx^1\\ \vdots\\ dx^{n_1}\end{pmatrix},$$

$$f_p^*\theta=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n_1}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2}\frac{\partial(y^{j_1}\circ f)}{\partial x^{i_1}}\Big|_{\varphi(p)}\right.$$

$$\left.\cdots\frac{\partial(y^{j_s}\circ f)}{\partial x^{i_s}}\Big|_{\varphi(p)}\theta_{j_1\cdots j_s}\circ f(p)\right)dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s},$$

$$(f_p^*\theta)_{i_1\cdots i_s}=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2}\frac{\partial(y^{j_1}\circ f)}{\partial x^{i_1}}\Big|_{\varphi(p)}\cdots\frac{\partial(y^{j_s}\circ f)}{\partial x^{i_s}}\Big|_{\varphi(p)}\theta_{j_1\cdots j_s}\circ f(p)$$

证明 从

$$f_p^*dy^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=dy^j\left(f_{*p}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=dy^j\left(\sum_{l=1}^{n_1}\frac{\partial(y^l\circ f)}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial y^l}\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{n_1}\frac{\partial(y^j\circ f)}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}\delta_l^j=\frac{\partial(y^j\circ f)}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}$$

得到 $f_p^*dy^j=\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\partial(y^j\circ f)}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}dx^i$. 由此，有

$$f_p^*\theta=f_p^*\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2}\theta_{j_1\cdots j_s}dy^{j_1}\otimes\cdots\otimes dy^{j_s}\right)$$

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2}\theta_{j_1\cdots j_s}\circ f(p)(f_p^*dy^{j_1})\otimes\cdots\otimes(f_p^*dy^{j_s})$$

$$= \sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2} \theta_{j_1\cdots j_s}\circ f(p)\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} \frac{\partial(y^{j_1}\circ f)}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{\varphi(p)} dx^{i_1}\right)$$

$$\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{i_s=1}^{n_1} \frac{\partial(y^{j_s}\circ f)}{\partial x^{i_s}}\bigg|_{\varphi(p)} dx^{i_s}\right)$$

$$= \sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n_1}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2} \frac{\partial(y^{j_1}\circ f)}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{\varphi(p)}\right.$$

$$\left.\cdots\frac{\partial(y^{j_s}\circ f)}{\partial x^{i_s}}\bigg|_{\varphi(p)} \theta_{j_1\cdots j_s}\circ f(p)\right)dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}. \qquad \#$$

定理 7 设$(M_i, \mathscr{D}_i)$为n_i维C^∞流形，$f: M_1\to M_2$为C^∞映射，θ为M_2上的s阶C^∞协变张量场，则$f^*\theta$为M_1上的s阶C^∞协变张量场，其中$(f^*\theta)_p = f_p^*\theta_{f(p)}$.

证明 由定理6，在局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$和(V,ψ)，$\{y^j\}$中，

$$f^*\theta = \sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n_1}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2} \frac{\partial(y^{j_1}\circ f)}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial(y^{j_s}\circ f)}{\partial x^{i_s}}\theta_{j_1\cdots j_s}\circ f\right)\cdot$$

$$dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}$$

因为$\theta_{j_1\cdots j_s}$是$y^1,\cdots,y^{n_2}$的C^∞函数，而y^j又是$x^1,\cdots,x^{n_1}$的C^∞函数，故$\displaystyle\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2} \frac{\partial(y^{j_1}\circ f)}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial(y^{j_s}\circ f)}{\partial x^{i_s}}\theta_{j_1\cdots j_s}\circ f$为$x^1,\cdots,x^{n_1}$的$C^\infty$函数，这就证明了$f^*\theta$为$M_1$上的$s$阶$C^\infty$协变张量场.

注 2 对照第二章§3例6.

利用定义8，定理3(4)和第二章§2定义4，§3定理4，并用从映射$(\tilde{f},f)$代替(f_*,f)可将上述定理7推广为

定理 8 设ξ_1,ξ_2为C^r向量丛，$\otimes^{0,s}\xi_1$，$\otimes^{0,s}\xi_2$分别为其$(0,s)$型C^r张量丛，$(\tilde{f},f):\xi_1\to\xi_2$为$C^k$从映射$(0\leqslant k\leqslant r)$，$\theta$为$\xi_2$的$s$阶$C^k$协变张量场，则$\tilde{f}^*\theta$为$\xi_1$的$s$阶$C^k$协变张量场，其中$(\tilde{f}^*\theta)_p = (\tilde{f}_p)^*\theta_{f(p)}$.

§2 外微分形式和外微分

这一节将研究反称协变张量、外微分形式、外微分运算并介绍 de Rham 定理.

定义 1 设 V 为 n 维向量空间，$\omega\in\otimes^{0,s}V$，如果对任何 $X_i\in V$ $(i=1,\cdots,s)$及$(1,\cdots,s)$的任何置换 π 满足:

$$\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})=(-1)^\pi\omega(X_1,\cdots,X_s),$$

其中 $(-1)^\pi=\begin{cases}1, & \pi \text{ 为偶置换},\\ -1, & \pi \text{ 为奇置换},\end{cases}$ 则称 ω 为 **s 阶反称协变张量或 s 阶外形式**. 设 s 阶反称协变张量的全体为 $\wedge^s V^*$，显然它是 $\otimes^{0,s}V$ 的一个子向量空间.

引理 1 ω 是反称的 $\Longleftrightarrow$ 对 $(1,\cdots,s)$ 的任一置换 π，$\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}}=(-1)^\pi\omega_{i_1\cdots i_s}$，其中 $\omega_{i_1\cdots i_s}=\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_s})$，而 $\{e_i\mid i=1,\cdots,n\}$ 为 V 的一个基.

证明 $(\Rightarrow)$
$$\begin{aligned}\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}}&=\omega(e_{i_{\pi(1)}},\cdots,e_{i_{\pi(s)}})\\&=(-1)^\pi\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_s})\\&=(-1)^\pi\omega_{i_1\cdots i_s}.\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ $\omega(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(s)})$

$$=\omega\left(\sum_{i_{\pi(1)}=1}^n a_{\pi(1)}^{i_{\pi(1)}}e_{i_{\pi(1)}},\cdots,\sum_{i_{\pi(s)}=1}^n a_{\pi(s)}^{i_{\pi(s)}}e_{i_{\pi(s)}}\right)$$

$$=\sum_{i_{\pi(1)},\cdots,i_{\pi(s)}=1}^n a_{\pi(1)}^{i_{\pi(1)}}\cdots a_{\pi(s)}^{i_{\pi(s)}}\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}}$$

$$=(-1)^\pi\sum_{i_{\pi(1)},\cdots,i_{\pi(s)}=1}^n a_{\pi(1)}^{i_{\pi(1)}}\cdots a_{\pi(s)}^{i_{\pi(s)}}\omega_{i_1\cdots i_s}$$

$$=(-1)^\pi\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^n a_1^{i_1}\cdots a_s^{i_s}\omega_{i_1\cdots i_s}$$

$$=(-1)^{\pi}\omega\left(\sum_{i_1=1}^{n}a_1^{i_1}e_{i_1},\cdots,\sum_{i_s=1}^{n}a_s^{i_s}e_{i_s}\right)$$

$$\stackrel{\prime}{=}(-1)^{\pi}\omega(X_1,\cdots,X_s). \qquad \#$$

注 1 0 阶和 1 阶协变张量视作反称的.

由定义 1 立即可看出,如果 $\omega\in\Lambda^sV^*$,且 $X_1,\cdots,X_s$ 中有两个相等,则 $\omega(X_1,\cdots,X_s)=0$. 由此还可得到,如果 $i_1,\cdots,i_s$ 中有两个相等,则 $\omega_{i_1\cdots i_s}=0$.

如果 $s\geqslant n+1,\omega\in\Lambda^sV^*$,则 $e_{i_1},\cdots,e_{i_s}$ 中至少有两个相等,故 $\omega_{i_1\cdots i_s}=0$,从而 $\omega=0$. 于是 $\Lambda^sV^*=\{0\}$.

定义 2 设 $\theta\in\otimes^{0,s}V$,映射(**协变张量的反称化**)

$A:\ \otimes^{0,s}V\to\Lambda^sV^*,$

$\theta\mapsto A(\theta)$

定义为

$$A(\theta)(X_1,\cdots,X_s)=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)}),$$

其中求和取遍所有$(1,\cdots,s)$的置换 π. 显然,这个公式等价于

$$(A(\theta))_{i_1\cdots i_s}=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}}.$$

易见 $A(\theta)\in\otimes^{0,s}V$. 因为

$$A(\theta)(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(s)})=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta(X_{\sigma\circ\pi(1)},\cdots,X_{\sigma\circ\pi(s)})$$

$$=(-1)^{\sigma}\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\circ\pi}(-1)^{\sigma\circ\pi}\theta(X_{\sigma\circ\pi(1)},\cdots,X_{\sigma\circ\pi(s)})$$

$$=(-1)^{\sigma}A(\theta)(X_1,\cdots,X_s),$$

故 $A(\theta)\in\Lambda^sV^*$.

定理 1 (1) A 为线性映射;

(2) $\theta\in\Lambda^sV^*\Leftrightarrow A(\theta)=\theta$;

(3) 若 $\theta\in\otimes^{0,s}V$，则 $A(A(\theta))=A(\theta)$

证明 (1) 从 A 的定义立即可知.

(2) ($\Leftarrow$) $\theta=A(\theta)\in\Lambda^s V^*$.

($\Rightarrow$) 设 $\theta\in\Lambda^s V^*$，则

$$A(\theta)(X_1,\cdots,X_s)=\frac{1}{s!}\sum_\pi(-1)^\pi\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})$$

$$=\frac{1}{s!}\sum_\pi(-1)^\pi\cdot(-1)^\pi\theta(X_1,\cdots,X_s)=\theta(X_1,\cdots,X_s),$$

即 $A(\theta)=\theta$.

(3) 由定义 2，$A(\theta)\in\Lambda^s V^*$，再由(2)，$A(A(\theta))=A(\theta)$. #

定义 3 设 $\alpha\in\Lambda^r V^*$，$\beta\in\Lambda^s V^*$，我们定义外积(或反称积或 Grassmann 积或楔积)

$$\wedge:\ \Lambda^r V^*\times\Lambda^s V^*\to\Lambda^{r+s}V^*$$

$$(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\wedge\beta=\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\alpha\otimes\beta),$$

即

$$(\alpha\wedge\beta)(X_1,\cdots,X_{r+s})=\frac{(r+s)}{r!s!}A(\alpha\otimes\beta)(X_1,\cdots,X_{r+s})$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi(\alpha\otimes\beta)(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})\beta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)}).$$

当 $r=s=1$ 时，

$$(\alpha\wedge\beta)(X_1,X_2)=\alpha(X_1)\beta(X_2)-\alpha(X_2)\beta(X_1).$$

定理 2 (1)
$$\left.\begin{aligned}&\alpha\wedge(\beta_1+\beta_2)=\alpha\wedge\beta_1+\alpha\wedge\beta_2,\\&(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta=\alpha_1\wedge\beta+\alpha_2\wedge\beta,\\&\alpha\wedge(\lambda\beta)=(\lambda\alpha)\wedge\beta=\lambda(\alpha\wedge\beta),\quad\lambda\in\mathbf{R};\end{aligned}\right\}\text{双线性}$$

(2) $\alpha\wedge\beta=(-1)^{rs}\beta\wedge\alpha$，$\alpha\in\Lambda^r V^*$，$\beta\in\Lambda^s V^*$，

特别当 $r=s=1$ 时有 $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$，$\alpha\wedge\alpha=0$；

(3) $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\dfrac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$,

$\alpha\in\wedge^r V^*, \beta\in\wedge^s V^*, \gamma\in\wedge^t V^*$. 结合律

由此，$\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ 与作外积的次序无关. 再一般地 $\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_s$ 与外积的次序无关，且

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_s=\frac{(r_1+\cdots+r_s)!}{r_1!\cdots r_s!}A(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_s).$$

证明 (1) 由$\wedge$的定义立即推得.

(2) $(\alpha\wedge\beta)(X_1,\cdots,X_{r+s})=\dfrac{1}{r!s!}\sum\limits_{\pi}(-1)^{\pi}\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})$.

$\beta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})=\dfrac{1}{r!s!}\sum\limits_{\pi}(-1)^{\pi}\beta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})$.

$\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})=(-1)^{rs}\dfrac{1}{r!s!}\sum\limits_{\tau}(-1)^{\tau}\beta(X_{\tau(1)},\cdots,X_{\tau(s)})$.

$$\alpha(X_{\tau(s+1)},\cdots,X_{\tau(r+s)})=(-1)^{rs}(\beta\wedge\alpha)(X_1,\cdots,X_{r+s}),$$

其中

$$\overbrace{(1,\cdots,r+s)\xrightarrow{\pi}(\pi(1),\cdots,\pi(r+s))\xrightarrow{rs\text{ 个对换}}}^{\tau}(\pi(r+1),\cdots,$$
$$\pi(r+s),\pi(1),\cdots,\pi(r)).$$

(3) 设 G 为$(1,\cdots,r+s+t)$的所有置换的全体，H 为保持 $r+s+1,\cdots,r+s+t$ 不动的置换的全体，则

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma(X_1,\cdots,X_{r+s+t})=\frac{1}{(r+s)!t!}\sum_{\pi\in G}(-1)^{\pi}(\alpha\wedge\beta)$$

$\cdot(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})\cdot\gamma(X_{\pi(r+s+1)},\cdots,X_{\pi(r+s+t)})=\dfrac{1}{(r+s)!t!}\sum\limits_{\pi\in G}$

$(-1)^{\pi}\dfrac{1}{r!s!}\sum\limits_{\rho\in H}(-1)^{\rho}\alpha(X_{\pi\circ\rho(1)},\cdots,X_{\pi\circ\rho(r)})\cdot\beta(X_{\pi\circ\rho(r+1)},\cdots,$

$X_{\pi\circ\rho(r+s)})\cdot\gamma(X_{\pi\circ\rho(r+s+1)},\cdots,\ X_{\pi\circ\rho(r+s+t)})=\dfrac{1}{(r+s)!r!s!t!}\sum_{\rho\in H}$

$\cdot\sum_{\pi\circ\rho\in G}(-1)^{\pi\circ\rho}\alpha(X_{\pi\circ\rho(1)},\cdots,X_{\pi\circ\rho(r)})\cdot\beta(X_{\pi\circ\rho(r+1)},\cdots,X_{\pi\circ\rho(r+s)})$

$\cdot\gamma(X_{\pi\circ\rho(r+s+1)},\cdots,\ X_{\pi\circ\rho(r+s+t)})=\dfrac{1}{(r+s)!r!s!}\sum_{\rho\in H}(r+s+t)!$

$\cdot A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(X_1,\cdots,\ X_{r+s+t})=\dfrac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(X_1,$

$\cdots,X_{r+s+t}),$

故 $\quad(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\dfrac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma),$

同理

$$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma),$$

于是
$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).\qquad \#$$

定理3 设 V 为 n 维向量空间，$\{e_i\mid i=1,\cdots,n\}$ 为 V 的一个基，$\{e^i\mid i=1,\cdots,n\}$ 为它的对偶基，则 $\{e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n\}$ 为 $\wedge^sV^*$ 的一个基，因而 $\wedge^sV^*$ 为 C_n^s 维向量空间.

证明 设 $\omega\in\wedge^sV^*\subset\otimes^{0,s}V$，则 $\omega=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\omega_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s}$，

由定理 1(2)和定理 2(3)以及 ω 的反称性，

$$\omega=A(\omega)=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\omega_{i_1\cdots i_s}A(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s})$$

$$=\frac{1}{s!}\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\omega_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}.$$

于是 $\{e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n\}$张成线性空间 $\wedge^s V^*$.

另一方面，如果 $\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}=0$，则当 $j_1<\cdots<j_s$ 时有

$$
\begin{aligned}
0&=\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\Big)(e_{j_1},\cdots,e_{j_s})\\
&=s!\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}A(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s})(e_{j_1},\cdots,e_{j_s})\\
&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s})(e_{j_{\pi(1)}},\\
&\qquad\cdots,e_{j_{\pi(s)}})\\
&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_s})(e_{j_1},\cdots,e_{j_s})=\lambda_{j_1\cdots j_s}.
\end{aligned}
$$

因此，$\{e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n\}$是线性无关的.

综合上述可知，$\{e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n\}$为$\wedge^s(V)$的一个基. #

例 1 设 V 为 $n(\geqslant 4)$ 维向量空间，$\{e_i\mid i=1,\cdots,n\}$为 V 的一个基，$\{e^i\mid i=1,\cdots,n\}$为它的对偶基，$\alpha=e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$，则 $\alpha\wedge\alpha=(e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4)\wedge(e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4)=2e^1\wedge e^2\wedge e^3\wedge e^4\neq 0$.

定义 4 设 $\wedge V^*=\wedge^0V^*\oplus\wedge^1V^*\oplus\cdots\oplus\wedge^nV^*$，其中$\oplus$表示直和，显然$\{1;e^i,i=1,\cdots,n;e^{i_1}\wedge e^{i_2},1\leqslant i_1<i_2\leqslant n;\cdots;e^1\wedge\cdots\wedge e^n\}$形成了$\wedge V^*$的一个基. $\wedge V^*$是由 1 和 $\wedge^1V^*=V^*$ 生成的 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$ 维的向量空间. 这里乘法 $\wedge$ 可线性开拓到 $\wedge V^*$ 上，即要求 $\wedge$ 关于向量加法是分配的. 这乘法也是结合的，并关于加法和乘法 $\wedge$ 形成一环，从而 $\wedge V^*$ 是一个具有单位元 1 的代数，称为 **Grassmann 代数或外代数.**

例 2 设$\{e_i\mid i=1,\cdots,n\}$和$\{\bar{e}_i\mid i=1,\cdots,n\}$都是 n 维向量空间的基，$\{e^i\mid i=1,\cdots,n\}$为$\{e_i\mid i=1,\cdots,n\}$的对偶基，$\{\bar{e}^i\mid i=1,$

$\cdots, n\}$ 为 $\{\bar{e}_i \mid i=1, \cdots, n\}$ 的对偶基. 则

$$\bar{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\bar{e}^{j_s}=\left(\sum_{i_1=1}^{n} d_{i_1}^{j_1} e^{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_s=1}^{n} d_{i_s}^{j_s} e^{i_s}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\pi}(-1)^{\pi} d_{i_1}^{j_{\pi(1)}}\cdots d_{i_s}^{j_{\pi(s)}} e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\begin{vmatrix} d_{i_1}^{j_1} & \cdots & d_{i_1}^{j_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_s}^{j_1} & \cdots & d_{i_s}^{j_s}\end{vmatrix} e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}.$$

特别当 $s=n$ 时, 有

$$\bar{e}^1\wedge\cdots\wedge\bar{e}^n=\begin{vmatrix} d_1^1 & \cdots & d_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n^1 & \cdots & d_n^n\end{vmatrix} e^1\wedge\cdots\wedge e^n.$$

由张量的分量变换公式和 ω 的反称性得到

$$\bar{\omega}_{j_1\cdots j_s}=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n} c_{j_1}^{i_1}\cdots c_{j_s}^{i_s}\omega_{i_1\cdots i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\pi}(-1)^{\pi} c_{j_{\pi(1)}}^{i_1}\cdots c_{j_{\pi(s)}}^{i_s}\,\omega_{i_1\cdots i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\begin{vmatrix} c_{j_1}^{i_1} & \cdots & c_{j_1}^{i_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{j_s}^{i_1} & \cdots & c_{j_s}^{i_s}\end{vmatrix}\omega_{i_1\cdots i_s}.$$

或者从

$$\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n}\bar{\omega}_{j_1\cdots j_s}\bar{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\bar{e}^{j_s}=\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n}\begin{vmatrix} c_{j_1}^{i_1} & \cdots & c_{j_1}^{i_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{j_s}^{i_1} & \cdots & c_{j_s}^{i_s}\end{vmatrix}\bar{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\bar{e}^{j_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\begin{vmatrix} c_{j_1}^{i_1} & \cdots & c_{j_1}^{i_s} \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ c_{j_s}^{i_1} & \cdots & c_{j_s}^{i_s}\end{vmatrix}\omega_{i_1\cdots i_s}\right)\bar{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\bar{e}^{j_s},$$

故 $$\varpi_{j_1\cdots j_s}=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_s\leq n}\begin{vmatrix}c_{j_1}^{i_1} & \cdots & c_{j_1}^{i_s}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{j_s}^{i_1} & \cdots & c_{j_s}^{i_s}\end{vmatrix}\omega_{i_1\cdots i_s}.$$

定理 4 设 V_i 为 n_i 维向量空间，$i=1, 2$. 由线性映射 $\mathscr{A}$: $V_1\to V_2$ 诱导出外形式之间的映射

$$\mathscr{A}^*:\ \wedge^r V_2^*\to\wedge^r V_1^*,\ \omega\mapsto\mathscr{A}^*\omega,$$

$$(\mathscr{A}^*\omega)(X_1,\cdots,X_r)=\omega(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_r),\ X_1,\cdots,X_r\in V_1,$$

则

(1) $\mathscr{A}^*\omega\in\wedge^r V_1^*$;

(2) $\mathscr{A}^*(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)=\lambda\mathscr{A}^*\omega_1+\mu\mathscr{A}^*\omega_2$,

$\omega_1,\omega_2\in\wedge^r V_2^*, \lambda, \mu\in\boldsymbol{R}$;

(3) $\mathscr{A}^*(\omega\wedge\eta)=\mathscr{A}^*\omega\wedge\mathscr{A}^*\eta,\ \omega\in\wedge^r V_2^*,\ \eta\in\wedge^s V_2^*$;

(4) 设$\{e_i|i=1,\cdots,n_1\}$为 V_1 的基，$\{e^i|i=1,\cdots,n_1\}$为其对偶基，$\{\eta_j|j=1,\cdots,n_2\}$为 V_2 的基，$\{\eta^j|j=1,\cdots,n_2\}$为其对偶基，$\mathscr{A}e_l=\sum\limits_{i=1}^{n_2}d_l^i\eta_i$. 则 $\mathscr{A}^*\eta^j=\sum\limits_{i=1}^{n_1}d_i^je^i$，且对 $\omega=\sum\limits_{1\leq j_1<\cdots<j_r\leq n_2}\varpi_{j_1\cdots j_r}\cdot\eta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\eta^{j_r}$，有

$$\mathscr{A}^*\omega=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n_1}\left(\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_r\leq n_2}\begin{vmatrix}d_{i_1}^{j_1} & \cdots & d_{i_1}^{j_r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_{i_r}^{j_1} & \cdots & d_{i_r}^{j_r}\end{vmatrix}\varpi_{j_1\cdots j_r}\right)\cdot e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_r}.$$

证明 (1) 由 §1 定义 6，$\mathscr{A}^*\omega\in\otimes^{0,r}V_1$，又因为

$$(\mathscr{A}^*\omega)(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})=\omega(\mathscr{A}X_{\pi(1)},\cdots,\mathscr{A}X_{\pi(r)})$$
$$=(-1)^\pi\omega(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_r)=(-1)^\pi\mathscr{A}^*\omega(X_1,\cdots,X_r),$$

故 $\mathscr{A}^*\omega\in\wedge^r V_1^*$.

(2) 应用 § 1 定义 6 下面的结果.

(3) $\mathscr{A}^*(\omega\wedge\eta)(X_1,\cdots,X_{r+s})=\omega\wedge\eta(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_{r+s})$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\omega\otimes\eta)(\mathscr{A}X_1,\cdots,\mathscr{A}X_{r+s})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}\frac{1}{(r+s)!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\omega(\mathscr{A}X_{\pi(1)},\cdots,\mathscr{A}X_{\pi(r)})$$

$$\cdot\eta(\mathscr{A}X_{\pi(r+1)},\cdots,\mathscr{A}X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}\frac{1}{(r+s)!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\mathscr{A}^*\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})$$

$$\cdot\mathscr{A}^*\eta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}\frac{1}{(r+s)!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\mathscr{A}^*\omega\otimes\mathscr{A}^*\eta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\mathscr{A}^*\omega\otimes\mathscr{A}^*\eta)(X_1,\cdots,X_{r+s})$$

$$=\mathscr{A}^*\omega\wedge\mathscr{A}^*\eta(X_1,\cdots,X_{r+s}),$$

故

$$\mathscr{A}^*(\omega\wedge\eta)=\mathscr{A}^*\omega\wedge\mathscr{A}^*\eta.$$

(4) 由§1定理3(4)，$\mathscr{A}^*\eta^j=\sum_{i=1}^{n_1}d_i^j e^i$. 于是，由(3)得到

$$\mathscr{A}^*\omega=\mathscr{A}^*\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}\omega_{j_1\cdots j_r}\eta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\eta^{j_r}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}\omega_{j_1\cdots j_r}\mathscr{A}^*\eta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathscr{A}^*\eta^{j_r}$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}\omega_{j_1\cdots j_r}\left(\sum_{i_1=1}^{n_1}d_{i_1}^{j_1}e^{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_r=1}^{n_1}d_{i_r}^{j_r}e^{i_r}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}\omega_{j_1\cdots j_r}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n_1}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}d_{i_1}^{j_{\pi(1)}}$$

$$\cdots d_{i_r}^{j_{\pi(1)}}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_r}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n_1}\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}\begin{vmatrix}d_{i_1}^{j_1}&\cdots&d_{i_1}^{j_r}\\\cdots&\cdots&\cdots\\d_{i_r}^{j_1}&\cdots&d_{i_r}^{j_r}\end{vmatrix}\omega_{j_1\cdots j_r}\right)$$

$\cdot e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_r}$. #

类似于§1定义7中张量丛的定义和公式$\omega_{j_1\cdots j_s}=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}$

$\cdot\begin{vmatrix} c_{j_1}^{i_1} & \cdots & c_{j_1}^{i_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{j_s}^{i_1} & \cdots & c_{j_s}^{i_s}\end{vmatrix}\omega_{i_1\cdots i_s}$ 可定义与C^r向量丛$\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R}),$ $\boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}\}$相联系的 **s 阶 C^r 外形式丛** $\wedge^s\xi^*=\{\wedge^s E^*=\bigcup\limits_{x\in M}\wedge^s E_x^*, \mathrm{M},$ $\pi_1, \mathrm{GL}(C_m^s, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^{C_m^s}, \mathscr{E}^s\}$，它是与$\xi$相联系的$(0, s)$型$C^r$张量丛的子向量丛.

定义 5 设$\wedge^s\xi^*$为与C^r向量丛ξ相联系的s阶C^r外形式丛，$U\subset M$. 称截面

$$\omega:\ U\to\wedge^s E^*=\bigcup_{x\in M}\wedge^s E_x^*,\quad x\mapsto\omega_x$$

为 **U 上的 s 阶外形式**，U 称为这外形式的定义域. 如果ω为C^0(连续)截面，则称它为 **U 上的 s 阶 C^0(连续)外形式**；如果$U\subset M$为开集，称$C^k(1\leqslant k\leqslant r)$截面$\omega$为 **$U$ 上的 s 阶 C^k 外微分形式**，其全体记为$C^k(\wedge^s E^*|_U)$.

当$s=0$时，ω为U上的C^k函数；当$s=1$时，ω也称为U上的C^k Pfaff 形式；当$s>n$时，$\omega=0$.

下面我们考虑与n维C^∞流形$(M, \mathscr{D})$的切丛$\xi=\{TM=\bigcup\limits_{p\in M}T_pM, M, \pi, \mathrm{GL}(n, R), \boldsymbol{R}^n, \mathscr{E}\}$相联系的 **S 阶 C^∞外形式丛** $\wedge^s\xi^*=\{\wedge^s T^*M=\bigcup\limits_{p\in M}\wedge^s T_p^*M, M, \pi_1, \mathrm{GL}(C_n^s, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^{C_n^s}, \mathscr{E}^s\}$，它是与$\xi$相联系的$(0, s)$型$C^\infty$张量丛的子向量丛，其中$\wedge^s T_p^*M$为$p$点处关于切空间$T_pM$的$s$阶外形式的全体，$\omega\in\wedge^s T_p^*M$称为 **$p$ 点处的 s阶外形式**.

设$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，$(U_\beta,\varphi_\beta)$，$\{y^i\}\in\mathscr{D}$，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$.因为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial y^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}dy^1\\ \vdots\\ dy^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^n\end{pmatrix},$$

故 $$\varpi_{j_1\cdots j_s}=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_s})}{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_s})}\omega_{i_1\cdots i_s},$$

$$dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_s}=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant 1}\frac{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_s})}{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_s})}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

特别当 $s=n$ 时，有

$$dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n}\varpi_{j_1\cdots j_s}dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_s}.$$

记U上的s阶C^∞外微分形式的全体为$C^\infty(\wedge^sT^*U)$， 其直和为$C^\infty(\wedge T^*U)=C^\infty(\wedge^0T^*U)\oplus C^\infty(\wedge^1T^*U)\oplus\cdots\oplus C^\infty(\wedge^nT^*U)$，如果$\omega\in C^\infty(\wedge T^*U)$，则在局部坐标系$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$中，

$$\omega=\omega_0+\sum_{i=1}^n\omega_i dx^i+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\omega_{i_1i_2}dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}+\cdots$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$+\cdots+\omega_{1\cdots n}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

其中 $\omega_0,\omega_{i_1i_2},\cdots,\omega_{i_1\cdots i_s},\cdots,\omega_{1\cdots n}\in C^\infty(U_\alpha,\mathbf{R})$.

定义 6 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形，我们定义外微分运算 d_s: $C^\infty(\wedge^sT^*M)\to C^\infty(\wedge^{s+1}T^*M)$，$\omega\mapsto d_s\omega$，简记为$d\omega$、

如果 $s=0$, $f\in C^\infty(\wedge^0 T^*M)=C^\infty(M,\mathbf{R})$, $X\in C^\infty(T^*M)$, $df(X)=Xf$;

如果 $s\geqslant 1$, $\omega\in C^\infty(\wedge^s T^*M)$, $X_i\in C^\infty(T^*M)$, $i=1,\cdots,s+1$, 令

$$d\omega(X_1,\cdots,X_{s+1})=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,X_{i-1},\hat{X}_i,X_{i+1},\cdots,X_{s+1})+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,X_{i-1},\hat{X}_i,X_{i+1},\cdots,X_{j-1},\hat{X}_j,X_{j+1},\cdots,X_{s+1}).$$

显然,上述定义 d 可用自然方法线性扩张到 $C^\infty(\wedge T^*M)\to C^\infty(\wedge T^*M)$. 由下面的引理 2 可知, d 的定义是合理的.

引理 2 如果 $f\in C^\infty(\wedge^0 T^*M)=C^\infty(M,\mathbf{R})$, $\omega\in C^\infty(\wedge^s T^*M)$, $s\geqslant 1$, 则 $df\in C^\infty(\wedge^1 T^*M)$, $d\omega\in C^\infty(\wedge^{s+1}T^*M)$.

证明 因为

$$df(\varphi_1X_1+\varphi_2X_2)=(\varphi_1X_1+\varphi_2X_2)f=\varphi_1\cdot X_1f+\varphi_2\cdot X_2f$$
$$=\varphi_1\cdot df(X_1)+\varphi_2\cdot df(X_2),\ \varphi_1,\varphi_2\in C^\infty(M,\mathbf{R}),$$
$$X_1,X_2\in C^\infty(T^*M),$$

故 df 为 M 上的 $(0,1)$ 型 C^∞ 场张量,由 §1定理, $df\in C^\infty(\wedge^1 T^*M)$.

如果 $\omega\in C^\infty(\wedge^s T^*M)$, $s\geqslant 1$, $d\omega$ 关于加法的偏线性是明显的. 为了证明 $d\omega$ 是反称的,只须验证

$$d\omega(X_1,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})=-d\omega(X_1,\cdots,X_{l+1},X_l,\cdots,X_{s+1}).$$

因为

$$d\omega(X_1,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})=\sum_{l+1<i}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{s+1})+(-1)^{l+1}X_l\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})+(-1)^{l+2}X_{l+1}\omega(X_1,\cdots,X_l,\hat{X}_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$
$$+\sum_{i<l}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{l+1<i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_i,\cdots,$$

$$\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})+\sum_{l+1<j}(-1)^{l+1+j}\omega([X_{l+1},X_j],X_1,\cdots,X_l,$$

$$\hat{X}_{l+1},\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})+\sum_{l+1<j}(-1)^{l+j}\omega([X_l,X_j],X_1,\cdots,$$

$$\hat{X}_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})+(-1)^{l+l+1}\omega([X_l,X_{l+1}],$$

$$X_1,\cdots,\hat{X}_l,\hat{X}_{l+1},\cdots,X_{s+1})+\sum_{i<l<l+1<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],$$

$$X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})+\sum_{i<l}(-1)^{i+l+1}$$

$$\cdot\omega([X_i,X_{l+1}],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_l,\hat{X}_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i<l}(-1)^{i+l}\omega([X_i,X_l],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_l,X_{l+1},\cdots,$$

$$X_{s+1})+\sum_{i<j<l}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,$$

$$X_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$

所以，如果将上式中 X_l 和 X_{l+1} 交换，明显地，它等于

$$-d\omega(X_1,\cdots,X_{l+1},X_l,\cdots,X_{s+1})$$

由反称性，剩下的仅须证明

$$d\omega(fX_1,X_2,\cdots,X_{s+1})=(fX_1)\omega(\hat{X}_1,X_2,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i=2}^{s+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(fX_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{j=2}^{s+1}(-1)^{1+j}\omega([fX_1,X_j],\hat{X}_1,X_2,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],fX_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})$$

$$=fd\omega(X_1,\cdots,X_{s+1})+\sum_{i=2}^{s+1}(-1)^{i+1}(X_if)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,$$

$$\cdots,X_{s+1})+\sum_{j=2}^{s+1}(-1)^{1+j}\omega(-(X_jf)X_1,\hat{X}_1,X_2,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,$$

$$X_{s+1})=fd\omega(X_1,\cdots,X_{s+1}).$$

于是，$d\omega$ 为$(0,s+1)$型 C^∞ 场张量，由 §1 定理 5，它是$(0,s+1)$型 C^∞ 张量场，因而 $d\omega\in C^\infty(\wedge^{s+1}T^*M)$. #

定理 5 设 $f\in C^\infty(\wedge^0T^*M)$，$\omega\in C^\infty(\wedge^sT^*M)$，$s\geqslant 1$，在局部坐标系$(U,\varphi)$，$\{x^i\}$中，

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

则

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i,$$

$$d\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}d\omega_{i_1\cdots i_s}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\omega_{i_1\cdots i_s}\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.$$

证明 任何 $p\in U$，取 p 的开邻域 $U_1\subset U$，使得在 M 上有 C^∞向量场 X_i，$X_i|_{U_1}\equiv\frac{\partial}{\partial x^i}$，$i=1,\cdots,n$. 于是在 U_1 中，

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=df(X_i)=X_if=\frac{\partial}{\partial x^i}f=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i},$$

$$df=\sum_{i=1}^{n}df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)dx^i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i.$$

再证第二式. 在 U_1 中，由于$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$，得到

$$\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n} d\omega_{i_1\cdots i_s}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}d\omega_{i_1\cdots i_s}\otimes dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_{\pi(1)}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{\pi(s+1)}}}\right)$$

$$=d\omega_{\hat{k}_1k_2\cdots k_{s+1}}\otimes dx^{k_2}\otimes\cdots\otimes dx^{k_{s+1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)$$

$$-d\omega_{k_1\hat{k}_2\cdots k_{s+1}}\otimes dx^{k_1}\otimes dx^{k_3}\otimes\cdots\otimes dx^{k_{s+1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_2}},\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^{k_3}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)+\cdots+(-1)^{s+2}d\omega_{k_1\cdots k_s\hat{k}_{s+1}}\otimes dx^{k_1}$$

$$\otimes\cdots\otimes dx^{k_s}\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}},\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_s}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}\frac{\partial(\omega_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{s+1}}\circ\varphi^{-1})}{\partial x^{k_i}}$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x^{k_i}}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{k_i}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^{k_i}},\frac{\partial}{\partial x^{k_j}}\right],\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{k_i}},\cdots,\right.$$

$$\left.\frac{\hat{\partial}}{\partial x^{k_j}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}X_{k_i}\omega(X_{k_1},\cdots,\hat{X}_{k_i},\cdots,X_{k_{s+1}})$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_{k_i},X_{k_j}],X_{k_1},\cdots,\hat{X}_{k_i},\cdots,\hat{X}_{k_j},\cdots,$$

$$X_{k_{s+1}})=d\omega(X_{k_1},\cdots,X_{k_{s+1}})=d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right),$$

$k_1<\cdots<k_{s+1}$,

故 $d\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n} d\omega_{i_1 \cdots i_s} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}$. #

注 2 从定理 5 证明可看出，在不致混淆的情况下，可以直接用$\frac{\partial}{\partial x^i}$运算而不再每次引进整体的 X_i.

定理 6 外微分运算 d 具有以下性质：

(1) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$,

$d(\lambda\omega) = \lambda d\omega$, ω, $\eta \in C^\infty(\wedge^s T^*M)$, $\lambda \in \mathbf{R}^1$;

(2) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$, $\omega \in C^\infty(\wedge^r T^*M)$,

$\eta \in C^\infty(\wedge^s T^*M)$;

(3) $d^2\omega = d(d\omega) = 0$, $\omega \in C^\infty(\wedge^s T^*M)$.

(4) 如果 $\omega_1, \cdots, \omega_k$ 为 C^∞ Pfaff 形式，则

$$d(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_k,$$

特别地，$d(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = 0$.

证明 (1) 由定义 6 立即得到.

(2) 由定理 5 和(1)，在局部坐标系(U, φ)，$\{x^i\}$中只须证明单项式

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \quad \eta = g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}$$

的情形即可.

$$r = s = 0,\ d(f \wedge g) = d(fg) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial((fg)\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i$$

$$= g \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i + f \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i$$

$$= df \wedge g + (-1)^0 f \wedge dg.$$

一般情形，

$$d(\omega \wedge \eta) = d(fg dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s})$$

$$= d(fg)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}$$

$$= (gdf + fdg)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}$$

$$= d\omega\wedge\eta + (-1)^r\omega\wedge d\eta.$$

(3) $s=0, \omega = f\in C^\infty(\wedge^0 T^*M)$.

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i,$$

$$d^2 f = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)\wedge dx^i$$

$$= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}dx^j\wedge dx^i$$

$$= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^j = 0.$$

$s\geqslant 1$，由(1)只须证 $\omega = fdx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$ 情形．因为

$$d\omega = df\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

$$d^2\omega = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}dx^j\wedge dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots$$

$$\wedge dx^{i_s} = 0.$$

(4) 用(2)和归纳法． #

定理 7 设$(M_i, \mathscr{D}_i)$为 n_i 维 C^∞ 流形，$i=1,2$，f: $M_1\to M_2$ 为 C^∞ 映射，ω，ω_1，$\omega_2\in C^\infty(\wedge^r T^*M_2)$，$\eta\in C^\infty(\wedge^s T^*M_2)$，$\lambda\in C^\infty(\wedge^0 T^*M_2) = C^\infty(M_2, \mathbf{R})$，则

(1) $f^*\omega\in C^\infty(\wedge^r T^*M_1)$;

(2) $f^*(\omega_1+\omega_2)=f^*\omega_1+f^*\omega_2$;

(3) $f^*(\lambda\cdot\omega)=(\lambda\circ f)\cdot f^*\omega$;

(4) $f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta$;

(5) $$f^*\left(\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_r\leq n_2}\omega_{j_1\cdots j_r}dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_r}\right)$$

$$=\sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n_1\\1\leq j_1<\cdots<j_r\leq n_2}}(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ f)\frac{\partial(y^{j_1}\circ f,\cdots,y^{j_r}\circ f)}{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_r})}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

特别地，$f^*(dy^j)=\sum\limits_{i=1}^{n_1}\frac{\partial(y^j\circ f)}{\partial x^i}dx^i$（参阅§1定理6）；当$n_1=n_2=n$时，

$$f^*(\lambda dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)=(\lambda\circ f)\frac{\partial(y^1\circ f,\cdots,y^n\circ f)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

(6) $d(f^*\omega)=f^*(d\omega)$，即 d 与 f^* 可交换.

证明 (1) 由 §1 定理，$f^*\omega$ 为 r 阶 C^∞ 协变张量场，又由定理 4(1)可知 $f^*\omega$ 是反称的，故 $f^*\omega\in C^\infty(\wedge^rT^*M_1)$.

(2)，(3)，(4)由定理 4(2)得到.

(5) 由(2)，(3)，(4)，$f^*(dy^j)=\sum\limits_{i=1}^{n_1}\frac{\partial(y^j\circ f)}{\partial x^i}dx^i$ 和定理4(4)，

$$f^*\left(\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_r\leq n_2}\omega_{j_1\cdots j_r}dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_r}\right)$$

$$=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_r\leq n_2}(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ f)\frac{\partial(y^{j_1}\circ f,\cdots,y^{j_r}\circ f)}{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_r})}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.$$

(6) 设(U,φ)，$\{x^i\}$为 $p\in M_1$ 的局部坐标系，(V,ψ)，$\{y^j\}$ 为 $f(p)\in M_2$ 的局部坐标系. 显然，

$$f^*(dy^j)=\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\partial(y^j\circ f)}{\partial x^i}dx^i=d(y^j\circ f)=d(f^*y^j),$$

$$f^*(d\omega_{j_1\cdots j_r})=f^*\left(\sum_{\alpha=1}^{n_2}\frac{\partial(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ\psi^{-1})}{\partial y^\alpha}dy^\alpha\right)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n_2}\frac{\partial(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ\psi^{-1})}{\partial y^\alpha}\cdot\frac{\partial(y^\alpha\circ f)}{\partial x^\beta}dx^\beta$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n_2}\frac{\partial(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ f)}{\partial x^\beta}dx^\beta=d(f^*\omega_{j_1\cdots j_r}).$$

再根据定理 6,

$$f^*(d\omega)=f^*\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}d\omega_{j_1\cdots j_r}\wedge dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_r}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}f^*(d\omega_{j_1\cdots j_r})\wedge f^*(dy^{j_1})\wedge\cdots\wedge f^*(dy^{j_r})$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}d(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ f)\wedge d(y^{j_1}\circ f)\wedge\cdots\wedge d(y^{j_r}\circ f)$$

$$=d\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n_2}(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ f)\wedge d(y^{j_1}\circ f)\wedge\cdots\wedge d(y^{j_r}\circ f)$$

$$=d(f^*\omega).\qquad\#$$

注 3 可以用定理 5 的结论作为外微分 d 定义的出发点，然后验证定义与局部坐标系的选取无关(用坐标观点定义 d)，再推出相应的定理 6,7 等(参阅[徐森林, 247—249 页题 14]).

最后，我们引进闭形式，恰当微分形式，de Rham 上同调群，并叙述 Cartan-de Rham 定理来结束这一节.

定义 7 设$(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形，$\omega\in C^\infty(\wedge^s T^*M)$. 如果 $d\omega=0$，则称 ω 为**闭形式**；如果存在 $\eta\in C^\infty(\wedge^{s-1}T^*M)$ 使 $\omega=d\eta$，则称 ω 为**恰当微分形式**或**全微分**.

定理 8 若 $\omega\in C^\infty(\wedge^s T^*M)$为恰当微分形式，则 ω 为闭形式，但反之不成立.

证明 设 $\omega=d\eta$, $\eta\in C^\infty(\wedge^{s-1}T^*M)$，由定理6(3), $d\omega=d(d\eta)=0$，即 ω 为闭形式.

例 3(反例) 在 $M=\boldsymbol{R}^2-\{(0,0)\}$上定义 C^∞Pfaff 形式

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

显然，$d\omega=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\wedge dx+\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}dx\wedge dy$

$$=\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dx\wedge dy=0,$$

故 ω 为闭形式. 但 ω 不是恰当微分形式. (反证)假设 ω 为恰当微分形式，即 $\omega=d\eta$, $\eta\in C^\infty(\wedge^0T^*M)$，则

$$\int_{\vec{C}}\omega=\int_{\vec{C}}d\eta=\int_0^{2\pi}\eta'_\theta d\theta=\eta(\theta)\Big|_0^{2\pi}=\eta(2\pi)-\eta(0)=0,$$

这与

$$\int_{\vec{C}}\omega=\int_{\vec{C}}\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}(-\sin\theta)\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\cos\theta\right]d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\neq0$$

相矛盾，其中 $\vec{C}$ 为逆时针方向的单位圆.

定义 8 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上的 s 阶 C^∞ 外微分形式的全体关于加法自然成一群 $C^\infty(\wedge^sT^*M)$，而外微分运算 d 定义了一个同态

$$d_s:\ C^\infty(\wedge^sT^*M)\to C^\infty(\wedge^{s+1}T^*M),\ s\in\mathbf{Z},$$

它可线性扩张为 d: $C^\infty(\wedge T^*M)\to C^\infty(\wedge T^*M)$，其中 $C^\infty(\wedge^sT^*M)=\{0\}$, $s\in\mathbf{Z}-\{0,1,\cdots,n\}$ 和 $C^\infty(\wedge T^*M)=\bigoplus\limits_{s\in\mathbf{Z}}C^\infty(\wedge^sT^*M)$. 设 M 上的 s 阶 C^∞ 闭外微分形式所成的加群为

$$Z^s_{\mathscr{D}}(M)=\{\omega\in C^\infty(\wedge^sT^*M)\mid d\omega=0\}=\text{Kernal }d_s,$$

而 s 阶 C^∞ 恰当微分形式所成的加群为

$$B^s_{\mathscr{D}}(M)=\{\omega\in C^\infty(\wedge^sT^*M)\mid\omega=d\eta,\ \eta\in C^\infty(\wedge^{s-1}T^*M)\}$$

$$=\text{Image }d_{s-1}.$$

因为 $d^2=0$，故 $B^s_{\mathscr{D}}(M)\subset Z^s_{\mathscr{D}}(M)$. 称商群

$$H_{\mathscr{D}}^{s}(M)=Z_{\mathscr{D}}^{s}(M)/B_{\mathscr{D}}^{s}(M)$$

为 M 上的**第 s 个 de Rham上同调群**. $H_{\mathscr{D}}^{s}(M)$中的元素称为s阶 C^{∞} 闭外微分形式的同调类, ω 的同调类记为$[\omega]$. 显然,

$$[\omega_1]=[\omega_2]\Longleftrightarrow\omega_1=\omega_2+d\eta,\ \eta\in C^{\infty}(\wedge^{s-1}T^*M).$$

下面我们不加证明地叙述一个最早由E. Cartan 猜测的, 并在1931 年由 de Rham 完全证明的重要的定理 (参阅[Warner, F. W.]).

定理 9 (Cartan-De Rham 定理) 设$(M, \mathscr{D})$为 n 维 C^{∞}紧致流形, 则 M 的 de Rham 上同调群$H_{\mathscr{D}}^{s}(M)=H_{\mathscr{D}}^{s}(M,\boldsymbol{R})$同构于 M 的实奇异上同调群 $H^{s}(M)=H^{s}(M,\boldsymbol{R})$, 即

$$H_{\mathscr{D}}^{s}(M)\cong H^{s}(M),\ s\in\boldsymbol{Z}.$$

注 4 $H_{\mathscr{D}}^{s}(M)$由 M 的微分构造 $\mathscr{D}$ 所决定, 而 $H^{s}(M)$由 M 的拓扑所决定, 二者的同构在微分几何与代数拓扑之间建立了联系. 从de Rham 定理还可看出, 由同一个拓扑流形 M 的二个不同微分构造 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$ 所决定的 de Rham 上同调群是同构的, 即

$$H_{\mathscr{D}_1}^{s}(M)\cong H_{\mathscr{D}_2}^{s}(M).$$

虽然能从 de Rham 定理和计算 M 的实奇异上同调群得到 M 的 de Rham 上同调群, 但对于一些特殊例子, 我们宁可用微分拓扑和分析的方法来计算 de Rham 上同调群, 由此也可得到 M 的实奇异上同调群.

定理 10 设$(M, \mathscr{D})$为 n 维 C^{∞} 连通流形, 则$H_{\mathscr{D}}^{0}(M)\cong\boldsymbol{R}$.

证明 因为 $B_{\mathscr{D}}^{0}(M)=d_{-1}(C^{\infty}(\wedge^{-1}T^*M))=d_{-1}(\{0\})=\{0\}$, 则 $H_{\mathscr{D}}^{0}(M)=Z_{\mathscr{D}}^{0}(M)=\{f\in C^{\infty}(\wedge^{0}T^*M)\mid df=0\}$. 如果 $df=0$, 则对任何 $p\in M$, 存在 p 的局部坐标系(U,φ), $\{x^i\}$, 使得

$$\varphi(U)=\{x=(x^1,\cdots,x^n)\in\boldsymbol{R}^n\mid\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2<1\}.$$ 由

$$0=df|_U=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i.$$

得到$\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}=0, i=1,\cdots,n$. 这就蕴涵着$f|_U=$常值. 由此可知, $M_1=\{p\in M\,|\,f(p)=f(p_0)\}$ 和 $M_2=\{p\in M\,|\,f(p)\neq f(p_0)\}$ 均为开集. 因为 $p_0\in M_1$ 和 M 连通, 故$M_2=\varnothing$, 从而 $M_1=M$, 即 $f|_M=$常值. 于是,

$H^0_{\mathscr{D}}(M)=Z^0_{\mathscr{D}}(M)=\{f\,|\,f:M\to \boldsymbol{R}$ 为常值函数$\}\cong\boldsymbol{R}$. #

定理 11(Poincaré) 设 $M\subset\boldsymbol{R}^n$ 为包含 0 的星形状开集: 对任何 $x\in M$, 必有 $\{tx\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}\subset M$. 则

$$H^s_{\mathscr{D}}(M)\cong\begin{cases}\boldsymbol{R}, s=0,\\ 0, s\in\boldsymbol{Z}-\{0\}.\end{cases}$$

证明 当 $s=0$ 时, 由定理 10, $H^0_{\mathscr{D}}(M)\cong\boldsymbol{R}$; 当 $s<0$ 时, 显然有 $H^s_{\mathscr{D}}(M)=0$; 当 $s>0$ 时, 可证 $Z^s_{\mathscr{D}}(M)=B^s_{\mathscr{D}}(M)$, 故

$$H^s_{\mathscr{D}}(M)=Z^s_{\mathscr{D}}(M)/B^s_{\mathscr{D}}(M)=0.$$

剩下的只须证 $Z^s_{\mathscr{D}}(M)=B^s_{\mathscr{D}}(M)$. 为此定义映射

$$I_s:\ C^\infty(\wedge^s T^*M)\to C^\infty(\wedge^{s-1}T^*M),\quad \omega\mapsto I_s(\omega).$$

设 $\omega=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$,

$$d\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

$$I_s(\omega)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\alpha=1}^{s}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{s-1}\omega_{i_1\cdots i_s}(tx)dt\right)\cdot x^{i_\alpha}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

(因为 M 为星形状开集, 故积分有意义).

显然, $I_s(0)=0$, 下面可证 $\omega=d(I_s(\omega))+I_s(d\omega)$. 因此, 如

果 $d\omega=0$，就可推出 $\omega=d(I_s(\omega))+I_s(0)=d(I_s(\omega))$. 事实上，

$$d(I_s(\omega))+I_s(d\omega)=s\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\left(\int_0^1 t^{s-1}\omega_{i_1\cdots i_s}(tx)dt\right)$$

$$\cdot dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^s\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^j}\right.$$

$$\left.\cdot(tx)dt\right)x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^s\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^j}(tx)dt\right)x^j dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$-\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^s\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^j}(tx)dt\right)$$

$$\cdot x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}=$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}s\left(\int_0^1 t^{s-1}\omega_{i_1\cdots i_s}(tx)dt\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^s\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^j}(tx)dt\right)x^j dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\left[\int_0^1\frac{d}{dt}(t^s\omega_{i_1\cdots i_s}(tx))dt\right]dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.\quad\#$$

定理 12 设$(M,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 流形，ω 为 M 上的 C^∞ 闭 1 形式，则

(1) ω 是 C^∞ 恰当形式；

$\Longleftrightarrow$(2) 对 M 上的任一分段 C^∞ 定向闭曲线 $\vec{C}$，有$\int_{\vec{C}}\omega=0$(外微分形式积分的定义和性质参阅 § 3)；

$\Longleftrightarrow$(3)对M上的任何两点p, q，以及连结p, q的任何两条分段C^∞定向曲线$\vec{C}_1,\vec{C}_2$，有$\int_{\vec{C}_1}\omega=\int_{\vec{C}_2}\omega$.

证明 (1)⇒(2) 设$\omega=d\eta$, $\eta\in C^\infty(\wedge^0T^*M)=C^\infty(M,\boldsymbol{R})$, $\vec{C}$由σ: $[0,T]\to M$, $\sigma(0)=\sigma(T)$确定,则

$$\int_{\vec{C}}\omega=\int_{\vec{C}}d\eta=\int_0^T\eta'_\theta d\theta=\eta(\sigma(\theta))\Big|_0^T=\eta(\sigma(T))-\eta(\sigma(0))=0.$$

(2)⇒(3) 设$\vec{C}$由$\vec{C}_1$和$-\vec{C}_2$组成,由(2)

$$\int_{\vec{C}_1}\omega-\int_{\vec{C}_2}\omega=\int_{\vec{C}}\omega=0,\text{故}\int_{\vec{C}_1}\omega=\int_{\vec{C}_2}\omega.$$

(3) ⇒(1) 显然只须对M的任一道路连通分支M_1证明存在C^∞的η,使$d\eta=\omega$. 设p为该连通分支M_1的一固定点，对任何$q\in M_1$，令$\eta(q)=\int_p^q\omega$，这里积分沿从p到q的任一定向曲线，由(3)它与选取的定向曲线无关. 设(U,φ),$\{x^i\}$为q的局部坐标系，则$\frac{\partial(\eta\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}$

$$=\lim_{\Delta x^i\to 0}\frac{\eta(\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^{i-1},x^i+\Delta x^i,x^{i+1},\cdots,x^n))-\eta(\varphi^{-1}(x))}{\Delta x^i}$$

$$=\lim_{\Delta x^i\to 0}\frac{\int_{x^i}^{x^i+\Delta x^i}\omega_i\circ\varphi^{-1}dx^i}{\Delta x^i}=\lim_{\Delta x^i\to 0}\omega_i\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^{i-1},x^i+\theta\Delta x^i,$$

$x^{i+1},\cdots,x^n)=\omega_i\circ\varphi^{-1}(x)$,故$\frac{\partial(\eta\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}=\omega_i\circ\varphi^{-1}(x)$,且$\eta\in C^\infty(\wedge^0 T^*M)=C^\infty(M,\boldsymbol{R})$. 从而$\omega=d\eta$. #

例 4 设$M\in\boldsymbol{R}^n$为包含0的星形状开集，$\omega=\sum_{i=1}^n\omega_i dx^i$为$M$上的$C^\infty 1$形式,如果$\omega$是恰当的,则存在$\eta\in C^\infty(\wedge^0 T^*M)$,使得

$$\sum_{i=1}^n\omega_i dx^i=\omega=d\eta=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\eta}{\partial x^i}dx^i,\ \frac{\partial\eta}{\partial x^i}=\omega_i.$$

于是，对 $x \in M$ 有

$$\eta(x) = \eta(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}\eta(tx)dt = \eta(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i dt$$

$$= \eta(0) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega_i(tx) \cdot x^i dt,$$

这说明 η 除差一常数 $\eta(0)$ 外完全由 ω 确定.

如果 ω 为 C^∞ 闭 1 形式，即 $d\omega = 0$. 令

$$\eta(x) = \eta(0) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega_i(tx) \cdot x^i dt,$$

其中 $\eta(0)$ 为任选常数. 因为 $0 = d\omega = d\left(\sum_{i=1}^n \omega_i dx^i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \cdot dx^j \wedge dx^i = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j$, 故 $\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}$.

于是,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \frac{\partial \omega_i(tx)}{\partial x^j} x^i dt + \int_0^1 \omega_i(tx) \delta_j^i dt\right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(tx) \cdot tx^i dt + \int_0^1 \omega_j(tx) dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(tx) \cdot tx^i dt + \int_0^1 \omega_j(tx) dt$$

$$= \int_0^1 t d\omega_j(tx) + \int_0^1 \omega_j(tx) dt$$

$$= t\omega_j(tx) \Big|_0^1 - \int_0^1 \omega_j(tx) dt + \int_0^1 \omega_j(tx) dt = \omega_j(x),$$

故 $d\eta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^n \omega_j dx^j = \omega$.

此时，$Z^1_{\mathscr{D}}(M)=B^1_{\mathscr{D}}(M)$，$H^1_{\mathscr{D}}(M)=0$.

例 5 设 $M\subset \boldsymbol{R}^n$ 为开集，且对任何 $p,q\in M$，任何连结 p,q 的平行坐标轴的一固定顺序的折线（例如，先平行 x^1 轴，再平行 x^2 轴等）全在 M 中．ω 为 M 上的 C^∞ 闭 1 形式，即 $d\omega=0$．令

$$\eta(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0^i}^{x^i}\omega_i(x^1,\cdots,x^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)dx^i,$$

其中 $x_0\in M$ 为一固定点，$x\in M$．则

$$\frac{\partial\eta}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0^i}^{x^i}\omega_i(x^1,\cdots,x^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)dx^i\right)$$

$$=\omega_j(x^1,\cdots,x^j,x_0^{j+1},\cdots,x_0^n)$$

$$+\sum_{i=j+1}^{n}\int_{x_0^i}^{x^i}\frac{\partial\omega_i(x^1,\cdots,x^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)}{\partial x^j}dx^i$$

$$=\omega_j(x^1,\cdots,x^j,x_0^{j+1},\cdots,x_0^n)$$

$$+\sum_{i=j+1}^{n}\int_{x_0^i}^{x^i}\frac{\partial\omega_j(x^1,\cdots,x^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)}{\partial x^i}dx^i$$

$$=\omega_j(x^1,\cdots,x^j,x_0^{j+1},\cdots,x_0^n)+\sum_{i=j+1}^{n}[\omega_j(x^1,\cdots,x^i,x_0^{i+1},\cdots,$$

$$x_0^n)-\omega_j(x^1,\cdots,x^{i-1},x_0^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)]=\omega_j(x^1,\cdots,x^n),$$

于是，$d\eta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\eta}{\partial x^j}dx^j=\sum_{j=1}^{n}\omega_jdx^j=\omega$．此时，$Z^1_{\mathscr{D}}(M)=B^1_{\mathscr{D}}(M)$，$H^1_{\mathscr{D}}(M)=0$.

例 6 设 $(S^1,\mathscr{D})$ 为通常的 C^∞ 流形，则

$$H^s_{\mathscr{D}}(S^1)\cong\begin{cases}\boldsymbol{R}, & s=0,1,\\ 0, & s\neq 0,1,s\in\boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

显然只须证 $H^1_{\mathscr{D}}(S^1)\cong \mathbf{R}$.

因为当 $s>1$ 时不存在 S^1 上的非 $0s$ 形式，故 $Z^1_{\mathscr{D}}(S^1)=C^\infty(\wedge^1T^*S^1)$，且 $B^1_{\mathscr{D}}(S^1)=\{df\mid f\in C^\infty(\wedge^0T^*S^1)\}$. 如果 θ 表示 S^1 上点的极坐标的极角，则 $\frac{\partial}{\partial\theta}$ 为 S^1 上的整体 C^∞ 处处非 0 切向量场，而它的对偶 1 形式 $d\theta$ 是 S^1 上的整体 C^∞ 的处处非 0 的 1 形式，此外 $d\theta$ 不是恰当的(注意 θ 不是整体的 C^∞ 函数!). 但是，对于 S^1 上的任意 C^∞1 形式 $\omega=g(\theta)d\theta$,

$$\eta(\theta)=\int_0^\theta g(t)\,dt-\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\,dt\right)\theta$$

是以 2π 为周期的 C^∞ 函数，即 η 为 S^1 上的 C^∞ 函数，且

$$\begin{aligned}d\eta&=g(\theta)d\theta-\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)dt\right)d\theta\\&=\omega-\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\,dt\right)d\theta,\end{aligned}$$

它为 S^1 上的 C^∞ 恰当 1 形式，因而 $[\omega]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\,dt\,[d\theta]$,

$$H^1_{\mathscr{D}}(S^1)=Z^1_{\mathscr{D}}(S^1)/B^1_{\mathscr{D}}(S^1)\cong\{\lambda d\theta\mid\lambda\in\mathbf{R}\}\cong\mathbf{R}.$$

例7 设 $M=\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的通常的 C^∞ 开子流形. 则

$$H^s_{\mathscr{D}}(M)=\begin{cases}\mathbf{R}, & s=0,1,\\ 0, & s\neq 0,1,s\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

因为 M 连通，由定理 10 可知 $H^0_{\mathscr{D}}(M)=\mathbf{R}$.

设 $\omega\in Z^1_{\mathscr{D}}(M)$，则 $\omega-\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\vec{C}_1}\omega\right)\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)\in Z^1_{\mathscr{D}}(M)$，其中 $\vec{C}_1$ 为逆时针方向的单位圆. 容易看出，对 M 上的任一分段 C^∞ 定向闭曲线 $\vec{C}$，有

$$\int_{\vec{C}}\left[\omega-\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\vec{C}_1}\omega\right)\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)\right]=0,$$

再根据定理 12(2)，$\omega-\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\vec{c}_1}\omega\right)\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)\in B^1_{\mathscr{D}}(M)$. 因此，$[\omega]=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\vec{c}_1}\omega\right)\left[\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right]$,

$$H^1_{\mathscr{D}}(M)=Z^1_{\mathscr{D}}(M)/B^1_{\mathscr{D}}(M)\cong\left\{\lambda\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)\Big|\lambda\in\mathbf{R}\right\}$$

$$\cong\mathbf{R}.$$

设 $\omega=a(r,\theta)dr\wedge d\theta\in C^\infty(\wedge^2T^*M)$，因为 $C^\infty(\wedge^3T^*M)=0$，故 $\wedge^2T^*M=Z^2_{\mathscr{D}}(M)$. 为选 $Pdr+Qd\theta\in C^\infty(\wedge^1T^*M)$，使得

$$adr\wedge d\theta=\omega=d(Pdr+Qd\theta)=\left(\frac{\partial Q}{\partial r}-\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)dr\wedge d\theta,$$

我们令

$$\begin{cases}P=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial r}=a,\end{cases}$$

故 $\quad Q=\int_{r_1}^r a(r,\theta)dr,\ \omega=d\left(\left(\int_{r_1}^r a(r,\theta)dr\right)d\theta\right)$，其中，$r_1,r\in(0,+\infty)$. 这就证明了 $C^\infty(\wedge^2T^*M)=Z^2_{\mathscr{D}}(M)=B^2_{\mathscr{D}}(M)$，$H^2_{\mathscr{D}}(M)=Z^2_{\mathscr{D}}(M)/B^2_{\mathscr{D}}(M)=0$. 于是，对任何 $p\in\mathbf{R}^2$ 有

$$H^s_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}^2-p)=\begin{cases}\mathbf{R}, & s=0,1,\\ 0, & s\in\mathbf{Z}-\{0,1\}.\end{cases}$$

例 8 设 $p,q\in\mathbf{R}^2$，$p\neq q$，下面证明

$$H^s_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}^2-\{p,q\})=\begin{cases}\mathbf{R}, & s=0,\\ \mathbf{R}\oplus\mathbf{R}, & s=1,\\ 0, & s\in\mathbf{Z}-\{0,1\}.\end{cases}$$

因为 $\mathbf{R}^2-\{p,q\}$ 连通，故 $H^0_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}^2-\{p,q\})=\mathbf{R}$.

类似 $\mathbf{R}^2-p$ 可证，对任何 $\omega\in Z^1_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}^2-\{p,q\})$ 有

$$[\omega]=\left(\oint_{\vec{c}_1}\omega\right)[\omega_1]+\left(\oint_{\vec{c}_2}\omega\right)[\omega_2],$$

其中 C_1: $(x-p_1)^2+(y-p_2)^2=r^2$, C_2: $(x-q_1)^2+(y-q_2)^2=r^2$, $p=(p_1,p_2), q=(q_1,q_2), r=\frac{\|p-q\|}{4}$,其定向为逆时针方向;

$$\omega_1=\frac{1}{2\pi}\frac{-(y-p_2)dx+(x-p_1)dy}{(x-p_1)^2+(y-p_2)^2},$$

$$\omega_2=\frac{1}{2\pi}\frac{-(y-q_2)dx+(x-q_1)dy}{(x-q_1)^2+(y-q_2)^2}.$$

如果 $\lambda[\omega_1]+\mu[\omega_2]=[\lambda\omega_1+\mu\omega_2]=0$, 则 $\lambda\omega_1+\mu\omega_2=d\eta$, 于是, $0=\oint_{\vec{C}_1}d\eta=\lambda\oint_{\vec{C}_1}\omega_1+\mu\oint_{\vec{C}_1}\omega_2=\lambda+\mu\cdot 0=\lambda$, 同理 $\mu=0$, 这就证明了 $[\omega_1]$ 和 $[\omega_2]$ 是线性无关的. 由此得到 $H^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$.

再证 $H^2_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})=0$. 为方便,不妨设 $p=(-1,0), q=(1,0)$. 令

$$U=\left\{(x,y)\,\middle|\,x<\frac{1}{2}\right\}\cap(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\}),$$

$$V=\left\{(x,y)\,\middle|\,x>-\frac{1}{2}\right\}\cap(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\}),$$

则 $U\cup V=\boldsymbol{R}^2-\{p,q\}$. 设 $\{\rho_U, \rho_V\}$ 为从属于 $\{U, V\}$ 的广义单位分解. 对任何 $f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\},\boldsymbol{R})$, $\rho_U f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^2-p,\boldsymbol{R})$, $(\rho_U f)(q)=0$, $\rho_V f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^2-q,\boldsymbol{R})$, $(\rho_V f)(p)=0$. 由例7, $\rho_U f dx\wedge dy\in B^2_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-p)$ 和 $\rho_V f dx\wedge dy\in B^2_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-q)$, 因而 $f dx\wedge dy=\rho_U f dx\wedge dy+\rho_V f dx\wedge dy\in B^2_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})$, $H^2_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})=0$.

注 5 为计算 $H^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$, 定义映射

$$\int: Z^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})\longrightarrow\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$$

$$\omega\longmapsto\left(\oint_{\vec{C}_1}\omega,\ \oint_{\vec{C}_2}\omega\right).$$

显然，$\omega=\lambda\omega_1+\mu\omega_2\mapsto(\lambda,\mu)$，故 $\mathrm{Im}\int=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$，即 $\int$ 为满射，且 $\omega\in B^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})\Leftrightarrow$ 对 $\boldsymbol{R}^2-\{p,q\}$ 中任一分段 C^∞ 定向闭曲线 C 有 $\oint_{\vec{C}}\omega=0\Leftrightarrow\left(\oint_{\vec{C}_1}\omega,\ \oint_{\vec{C}_2}\omega\right)=(0,0)$. 即 $B^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}-\{p,q\})=\mathrm{Ker}\int$. 由同构定理，$H^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,\ q\})=Z^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})/B^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,q\})=Z^1_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p,\ q\})/\mathrm{Ker}\int\cong\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}$.

类似地，读者可以证明($p_i\neq p_j,\ i\neq j$)

$$H^s_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}^2-\{p_1,\cdots,p_m\})=\begin{cases}\boldsymbol{R}, & s=0,\\ \underbrace{\boldsymbol{R}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{R}}_{m\text{个}}, & s=1,\\ 0, & s\in\boldsymbol{Z}-\{0,1\}.\end{cases}$$

注6 从例 6 和例7可看出 S^1 和 $M=\boldsymbol{R}^2-\{(0,0)\}$ 的de Rham 上同调群是相同的，从拓扑的观点来看是自然的. 因为 $F:[0,1]\times M\to M$, $F(t,x)=(1-t)x+t\dfrac{x}{\|x\|}$, $F(0,x)=x$, $F(1,x)=\dfrac{x}{\|x\|}$, $F(t,x)=x(x\in S^1)$，故 S^1 为 M 的强形变收缩核和它们的实奇异上同调群是相同的，再由 de Rham 定理，它们的 de Rham 上同调群也应相同.

例 9 设 $M\subset\boldsymbol{R}^3$ 为区域，且存在 $(x_0,y_0,z_0)\in M$ 使得对任何 $(x,y,z)\in M$，连 (x_0,y_0,z_0) 和 $(x_0,y,\ z_0)$，连 (x_0,y,z_0) 和 (x,y,z_0)，连 (x,y,z_0) 和 (x,y,z) 得到的折线全在 M 中，$\omega\in C^\infty(\Lambda^2T^*M)$，则 $H^2_{\mathscr{D}}(M)=Z^2_{\mathscr{D}}(M)/B^2_{\mathscr{D}}(M)=0$，即

$d\omega=0\Leftrightarrow\omega$ 为 C^∞ 恰当微分形式.

由定理 8 只须证明：$d\omega=0\Rightarrow\omega$ 为 C^∞ 恰当微分形式. 设

$$\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy.$$

为求 η 使 $d\eta=\omega$，我们可先从缺一项的 C^∞ 1-形式中去寻找(简

单!). 例如缺 dz 项, 令 $\eta = u dx + v dy$, 其中 u, v 为待定函数. 于是,

$$P dy\wedge dz + Q dz\wedge dx + R dx\wedge dy = \omega = d\eta$$
$$= -\frac{\partial v}{\partial z} dy\wedge dz + \frac{\partial u}{\partial z} dz\wedge dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\wedge dy,$$

即

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial z} = P & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = Q & (2) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = R & (3) \end{cases}$$

由(1)选 $v(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} P(x, y, z) dz,$ (4)

由(2)选 $u(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} Q(x, y, z) dz + f(x, y).$ (5)

其中 $f \in C^{\infty}(M; \mathbf{R})$ 是待定的, 再选 f 使它满足(3), 为此将(4), (5)代入(3)得

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dz - \frac{\partial f}{\partial y} = R \tag{6}$$

因为 $0 = d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$

所以(6)成为

$$R(x, y, z) - R(x, y, z_0) - \frac{\partial f}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial z} dz - \frac{\partial f}{\partial y} = R(x, y, z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -R(x, y, z_0),$$

$$f(x, y) = -\int_{y_0}^{y} R(x, y, z_0) dy, \tag{7}$$

将(7)代入(5)得到 u. 通过直接计算可知, 对

$$\eta = u dx + v dy = \left(\int_{z_0}^{z} Q(x, y, z) dz - \int_{y_0}^{y} R(x, y, z_0) dy\right) dx$$

$$-\left(\int_{z_0}^{z} P(x,y,z)dz\right)dy,$$

就应有 $\omega=d\eta$.

注 7 关于 de Rham 上同调群的计算，Mayer-Vietoris 序列以及有关进一步的理论可参阅[Bott, R. and Tu, L. W.].

§3 C^∞ 流形的定向和 Stokes 定理

定义1 设$(M,\mathscr{D})$为 n 维C^∞流形，$\xi=\{TM,M,\pi,\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^n\}$为切丛. 如果切丛 ξ 或 TM 作为 C^∞ 向量丛是可定向的(参阅第二章§2 定义 7 和第二章§3 定义 3)，则称流形$(M,\mathscr{D})$为**可定向的**；如果切丛作为 C^∞ 向量丛是不可定向的，则称流形$(M,\mathscr{D})$为**不可定向的**.

第二章§3 定义 3 中的转换映射为

$$g_{\beta\alpha}(p)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}\in\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R}),$$

第二章§2 定义 7, 8 和定理 3, 4, 5, 6, 7，对于 C^∞ 切丛自然是成立的. 再根据第二章§2 定理 3 可知，对于 n 维 C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$，上述定义 1 等价于

定义 1′ 设$(M,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 流形，如果存在$\mathscr{D}'_1\subset\mathscr{D}$ 满足：

(1) $\{U\,|\,(U,\varphi)\in\mathscr{D}'_1\}$复盖 M；

(2) 如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}\in\mathscr{D}'_1$, $(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}\in\mathscr{D}'_1$,

则有

$$\left.\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|_{\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)}>0,$$

即

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial y^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix},$$

即
$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]},$$

则称$(M,\mathscr{D})$为**可定向**的.

如果存在$\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}$,满足(1)(2)及(3)最大性:如果$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$与任何$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1$满足(2),则$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$. 换句话说,$(U,\varphi)\overline{\in}\mathscr{D}_1$,则至少存在一个$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1$,它与$(U,\varphi)$不满足(2). 则称$\mathscr{D}_1$为$(M,\mathscr{D})$的一个**定向**.

一个**定向流形**指的是三序组$(M,\mathscr{D},\mathscr{D}_1)$,其中$\mathscr{D}_1$为$(M,\mathscr{D})$的一个定向.

如果$(M,\mathscr{D})$不是可定向的,则称它为**不可定向**的.

显然,如果$\mathscr{D}_1'$满足(1)(2),则$\mathscr{D}_1=\{(U,\varphi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}$, 且与$\mathscr{D}_1'$中的元素满足(2)$\}$为$(M,\mathscr{D})$的一个定向.

此外,如果$\mathscr{D}_1$为$(M,\mathscr{D})$的一个定向,则$\mathscr{D}_1^-=\{(U,\rho_{反}\circ\varphi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1\}$为$(M,\mathscr{D})$的另一个定向,其中$\rho_{反}$: $\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$, $\rho_{反}(x^1,\cdots,x^{n-1},x^n)=(x^1,\cdots,x^{n-1},-x^n)$.

利用n次C^∞微分形式可以给出C^∞流形可定向的充分条件和必要条件.

定理1 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形.

(1) 如果存在M上的一个处处非0的n次C^∞微分形式ω,则M是可定向的.

(2) 如果$(M,\mathscr{D})$又是可定向的仿紧流形,则存在M上的处处非0的n次C^∞微分形式ω.

证明 (1) 设(U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，且U连通，因而有C^∞函数f_φ: $U\to\boldsymbol{R}$使得$\omega=f_\varphi dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. 因为$\omega$处处非0，故$f_\varphi$在$U$上也处处非0. 根据连续函数的0值定理，$f_\varphi|_U>0$或$f_\varphi|_U<0$. 令

$$\mathscr{D}_1=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}\mid f_\varphi>0\}$$

(其中U不必连通)则$\mathscr{D}_1$为M上的一个定向.

任何$p\in M$，如果在p的连通的局部坐标系中$f_\varphi|_U<0$，则在p的新局部坐标系$(U,\rho_{反}\circ\varphi)$中，$f_{\rho_{反}\circ\varphi}>0$. 于是，$\mathscr{D}_1$满足定义1′中的(1).

如果(U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}_1$，(V,ψ)，$\{y^i\}\in\mathscr{D}_1$，且$U\cap V\neq\varnothing$，则在$U\cap V$上有

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\frac{f_\psi}{f_\varphi}dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n,$$

故

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}=\frac{f_\psi}{f_\varphi}>0.$$

于是，$\mathscr{D}_1$满足定义1′中的(2).

如果$(V,\psi)\in\mathscr{D}$，且与任何$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$满足定义1′中的(2)，则

$$\frac{f_\psi}{f_\varphi}=\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}>0.$$

又因$f_\varphi>0$，故$f_\psi>0$且$(V,\psi)\in\mathscr{D}_1$，这就证明了$\mathscr{D}_1$满足定义1′中的(3).

(2) 设$\mathscr{D}_1$为M的一个定向，则$\{U\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1\}$为$M$的一个开覆盖. 因为$M$是仿紧的，所以有局部有限的开精致$\{U_\alpha\mid(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1,\alpha\in\Gamma\}$，而$\{g_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$为从属于它的单位分解. 设$\{x_\alpha^i\}$为$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$的局部坐标，定义

$$\omega=\sum_{\alpha\in\Gamma}g_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n,$$

显然 ω 为 M 上的 n 次 C^∞ 微分形式. 只须证 ω 处处非 0.

对于任何 $p\in M$, 取 p 的局部坐标系 (U,φ), $\{y^i\}\in\mathscr{D}_1$, 于是若 $p\in U\cap U_\alpha$ 时, 则在 $U\cap U_\alpha$ 上有

$$dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n=f_\alpha dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n.$$

因为 (U,φ), $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1$, 故 $f_\alpha|_{U\cap U_\alpha}>0$, $f_\alpha(p)>0$, $f_\alpha(p)g_\alpha(p)\geqslant 0$. 再由 $\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}g_\alpha(p)=1$, 必存在 $g_{\alpha_0}(p)>0$, 且有 $f_{\alpha_0}(p)g_{\alpha_0}(p)>0$,

$\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha(p)g_\alpha(p)>0$ 和

$$\omega_p=\sum_{\alpha\in\Gamma}g_\alpha(p)dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n=\Big(\sum_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha(p)g_\alpha(p)\Big)dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$$

$$\neq 0. \quad \#$$

定理 2 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的 n 维 C^∞ 正则子流形, 则

(1) M 可定向 $\Leftrightarrow$ (2) M 上存在处处非 0 的连续法向量场, 即存在连续映射

$$N: M\to T\boldsymbol{R}^{n+1},$$

$$x\mapsto N(x)\perp I_{*x}(T_xM),\ N(x)\neq 0,$$

其中 $I: M\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ 为包含映射.

$\Leftrightarrow$ (3) M 上存在连续的单位法向量场.

证明 (3) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $\{x^i\,|\,i=1,\cdots,n+1\}$ 为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的通常的整体坐标, 取 M 的连通的局部坐标系

$$(u_1,\varphi_1),\ \{u^i\,|\,i=1,\cdots,n\}$$

和 (U_2,φ_2), $\{v^i\,|\,i=1,\cdots,n\}$, 使得

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n},\ N\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]}$$

(只要有一点满足此式, 则由 U_1 连通, N 连续和 0 值定理推出此

式在 U_1 中成立，其中$\frac{\partial}{\partial u^i}=I_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}^*\right)$，

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial v^n},\quad N\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]}.$$

则当 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$ 时，在 $U_1\cap U_2$ 中有

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial v^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial v^n}\\ N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial v^1} & 0\\ \cdots & & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial v^n} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial v^n} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial u^n}\\ N\end{pmatrix},$$

故

$$\frac{\partial(u^1,\cdots,u^n)}{\partial(v^1,\cdots,v^n)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial v^1} & 0\\ \cdots & & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial v^n} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial v^n} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}>0,$$

$$\mathscr{D}_1=\left\{(U,\varphi),\{u^i\}\,\middle|\,\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n},N\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\quad\cdots,\quad\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]}\right\}$$ 为

M上的一个定向，从而M是可定向的.

(1)⇒(3)　设 $\mathscr{D}_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{u_\alpha^i\}\mid\alpha\in\Gamma\}$ 为M的一个定向，$(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{u_\alpha^i\}\in\mathscr{D}_1$，

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u_\alpha^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial u_\alpha^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}^\alpha & \cdots & c_{1\,n+1}^\alpha\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1}^\alpha & \cdots & c_{n\,n+1}^\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\end{pmatrix},$$

令 $N_\alpha^i=(-1)^{i+n+1}\det\begin{pmatrix}c_{11}^\alpha & \cdots & c_{1\,i-1}^\alpha & c_{1\,i+1}^\alpha & \cdots & c_{1\,n+1}^\alpha\\ \cdots & & & & & \\ c_{n1}^\alpha & \cdots & c_{n\,i-1}^\alpha & c_{n\,i+1}^\alpha & \cdots & c_{n\,n+1}^\alpha\end{pmatrix}$,

$$N_\alpha=\frac{\pm 1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}(N_\alpha^i)^2}}(N_\alpha^1,\cdots,N_\alpha^{n+1}).$$

其中± 1选得使

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u_\alpha^n},N_\alpha\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]}.$$

由于 c_{ij}^α 为 U_α 上的 C^∞ 函数，$\mathrm{rank}(c_{ij}^\alpha)=n$，可知 N_α 是定义确切的，且为 U_α 上的 C^∞ 函数.

如果(U_β,φ_β)，$\{u_\beta^i\}\in\mathscr{D}_1$，类似可得到 U_β 上的C^∞ 单位法向量场 N_β，使得

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial u_\beta^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u_\beta^n},N_\beta\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]}.$$

于是

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u_\beta^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial u_\beta^n}\\ N_\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u^1}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial u^n}{\partial v^1} & 0\\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial v^n} & \cdots & \dfrac{\partial u^n}{\partial v^n} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{\beta\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u_\alpha^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial u_\alpha^n}\\ N_\alpha\end{pmatrix},$$

其中 $\delta_{\beta\alpha}=\pm 1$. 由

$$\frac{\partial(u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^n)}{\partial(u_\beta^1,\cdots,u_\beta^n)}\cdot\delta_{\beta\alpha}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_\alpha^1}{\partial u_\beta^1} & \cdots & \dfrac{\partial u_\alpha^n}{\partial u_\beta^1} & 0\\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial u_\alpha^1}{\partial u_\beta^n} & \cdots & \dfrac{\partial u_\alpha^n}{\partial u_\beta^n} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{\beta\alpha}\end{pmatrix}>0$$

和$\frac{\partial(u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^n)}{\partial(u_\beta^1,\cdots,u_\beta^n)}>0$推出$\delta_{\beta\alpha}=1$. 因此,我们可以拼成一个$M$上的整体$C^\infty$单位法向量场. #

现在我们用各种方法来证明一些n维C^∞流形$(M,\mathscr{D})$是可定向的还是不可定向的.

例 1 (1) 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞可平行的流形,即存在整体的C^∞基向量场$\{X_i\mid i=1,\cdots,n\}$,或切丛TM为平凡向量丛,则M是可定向的.

更进一步,如果存在M上的整体C^0(即连续)基向量场$\{X_i\mid i=1,\cdots,n\}$,则

$$\mathscr{D}_1=\{(U,\varphi),\{x^i\}\mid\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}=\overrightarrow{[X_1,\cdots,X_n]}\}$$

为M上的一个定向

或者$\mathscr{O}=\{o_p=\overrightarrow{[X_{1p},\cdots,X_{np}]}\mid p\in M\}$为$M$上的一个定向.

由第二章§3定理8,Lie群是可定向的. 例如$\mathbf{R}^n,S^1,S^3$等是可定向的.

此外,由于$S^7,P^7(\mathbf{R})$是可平行的,故也是可定向的.

(2) 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形,且存在整体坐标$\{x^i\}$,则$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$为$M$上的整体$C^\infty$坐标基向量场,因而$M$是可定向的. 此时,

$$\mathscr{D}_1=\{(U,\varphi),\{y^i\}\in\mathscr{D}\mid\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_p\right]}$$

$$=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right]},p\in U\}$$

或$\mathscr{O}=\{o_p=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right]}\mid p\in M\}$为$M$上的一个定向.

例如 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集 U 以它的通常直角坐标为其整体坐标，故 U 是可定向的. 再如 S^1 有整体 C^∞ 基向量场 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ 或 $X=(-x^2, x^1)$，故 S^1 是可定向的，但它没有整体坐标.

例 2 $S^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1\}$ 是可定向的. 下面我们用各种方法来证明它.

方法 1：易证 $X=\sum\limits_{i=1}^{n+1}x^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 为 S^n 上的 C^∞ 单位法向量场，由定理 2，S^n 是可定向的.

方法 2：由第一章 §1 例 3，$\mathscr{D}_1'=\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$，

$$(\bar{u}^1,\cdots,\bar{u}^n)=\left(\frac{u^1}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u^i)^2},\cdots,\frac{u^n}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u^i)^2}\right),$$

则 Jacobi 行列式

$$\mathrm{J}_{\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}}=-\left(\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u^i)^2}\right)^n,$$

如果将 $(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ 改为 $(u^2,u^1,\cdots,u^n)$，则其 Jacobi 行列式 >0，故 S^n 是可定向的.

方法 3：由第一章 §1 例 3，$\mathscr{D}_2'=\{(U_i^+,\varphi_i^+),(U_i^-,\varphi_i^-)\mid i=1,\cdots,n+1\}$，$\varphi_i^+(x^1,\cdots,x^{n+1})=(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1})$，$\varphi_i^-(x^1,\cdots,x^{n+1})=(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1})$. 如果取 $(-1)^{i+1}(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1})$ 为 U_i^+ 的局部坐标，$(-1)^i(x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n+1})$ 为 U_i^- 的局部坐标，其中 $(-1)^{i+1}$ 表示作 $i+1$ 次对换，则相应的 Jacobi 行列式 >0，故 S^n 是可定向的.

方法 4. 构造 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上的 n 次 C^∞ 微分形式

$$\eta=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x^i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^{n+1}.$$

因$\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1$，其中一个变量视作其余 n 个变量的函数，则两边微分得 $2\sum_{i=1}^{n+1}x^i dx^i=0$. 显然，至少有一个 $x^i\neq 0$，不妨设 $x^{n+1}\neq 0$. 于是，

$$
\begin{aligned}
I^*\eta=&\sum_{i\neq 1}^{n}(-1)^{i-1}x^i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\wedge\\
&\left(-\frac{x^1dx^1+\cdots+x^n dx^n}{x^{n+1}}\right)+(-1)^n x^{n+1}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\
=&(-1)^n\frac{\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2}{x^{n+1}}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,
\end{aligned}
$$

其中 $I:S^n\to\mathbf{R}^{n+1}$ 为包含映射. 这就证明了 $I^*\eta$ 为 S^n 上的处处非 0 的 n 次 C^∞ 微分形式，由定理 1，S^n 是可定向的.

例 3 n 维复解析流形 $(M,\mathscr{D})$ 视作 $2n$ 维实解析流形是可定向的. 由第一章 §1 例 5，Jacobi 行列式为

$$
\frac{\partial(u^1,\cdots,u^n,v^1,\cdots,v^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)}=\left|\frac{\partial(w^1,\cdots,w^n)}{\partial(z^1,\cdots,z^n)}\right|^2>0,
$$

故 $(M,\mathscr{D})$ 为 $2n$ 维实解析可定向流形.

例 4 n 维实射影空间 $P^n(\mathbf{R})$. 当 n 为奇数时它是可定向的；当 n 为偶数时，它是不可定向的.

方法 1. 由第一章 §1 例 4，

$\varphi_k:U_k\to\mathbf{R}^n$,

$$
\varphi_k([(x^1,\cdots,x^{n+1})])=\left(\frac{x^1}{x^k},\cdots,\frac{x^{k-1}}{x^k},\widehat{1},\frac{x^{k+1}}{x^k},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^k}\right)
$$

$$
=({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{n+1}),
$$

$$
J_{\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}}=\frac{\partial({}_l\xi^1,\cdots,{}_l\xi^{l-1},{}_l\xi^{l+1},\cdots,{}_l\xi^{n+1})}{\partial({}_k\xi^1,\cdots,{}_k\xi^{k-1},{}_k\xi^{k+1},\cdots,{}_k\xi^{n+1})}
$$

$$= (-1)^{l+k}\left(\frac{1}{{}_k\xi^l}\right)^{n+1}.$$

（1）如果 n 为奇数，则

$$J_{\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}} = (-1)^{l+k}\left(\frac{1}{{}_k\xi^l}\right)^{n+1}\begin{cases}>0, & l\text{ 和 }k\text{ 奇偶性相同,}\\ <0, & l\text{ 和 }k\text{ 奇偶性相反.}\end{cases}$$

由此可推出 $\mathscr{D}_1' = \{(U_k, \varphi_k),\ k$ 为奇数；$(U_k, \rho_{反}\circ\varphi_k)$，$k$ 为偶数 $| k = 1, \cdots, n+1\}$ 满足定义 1′ 中的(1)、(2)和由它确定的 $\mathscr{D}_1 = \{(U, \varphi) | (U, \varphi) \in \mathscr{D}$，且与 $\mathscr{D}_1'$ 中的元素满足定义 1′ 中(2)$\}$ 为 M 的一个定向．这就证明了 $P^n(\boldsymbol{R})$ 是可定向的．

（2）容易看出，$\sigma: [0,1] \to U_k \subset P^n(\boldsymbol{R})$，$\sigma(t) = [tp + (1-t)q]$ 为连结 $[p]$ 和 $[q]$ 的一条道路，其中 $p = (p^1, \cdots, p^{k-1}, 1, p^{k+1}, \cdots, p^{n+1})$，$q = (q^1, \cdots, q^{k-1}, 1, q^{k+1}, \cdots, q^{n+1})$．因而 U_k 为 $P^n(\boldsymbol{R})$ 的道路连通的开集，$k = 1, \cdots, n+1$．

如果 n 为偶数，则

$$J_{\varphi_{k+1}\circ\varphi_k^{-1}} = -\left(\frac{1}{{}_k\xi^{k+1}}\right)^{n+1}\begin{cases}>0, & {}_k\xi^{k+1} < 0,\\ <0, & {}_k\xi^{k+1} > 0,\end{cases}$$

再根据第二章 §2 定理 6(2)，$P^n(\boldsymbol{R}^n)$ 是不可定向的．

方法 2．设 $\rho: \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^{n+1}$，$\rho(x) = -x$ 和 $\rho_1: S^n \to S^n$，$\rho_1(x) = -x$ 为对径映射；$I: S^n \to R^{n+1}$，$I(x) = x$ 为包含映射；$\pi: S^n \to P^n(\boldsymbol{R}) = S^n/\sim$，$\pi(x) = [x]$ 为投影映射．

因为 $\rho^*\eta = \sum\limits_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}(-x^i)(-dx^1)\wedge\cdots\wedge\widehat{(-dx^i)}\wedge\cdots\wedge$

$(-dx^{n+1}) = (-1)^{n+1}\eta$ 和 $\rho\circ I = I\circ\rho_1$（$\eta$ 参阅例 2 方法 4），所以

$$\rho_1^*\circ I^*\eta = I^*\circ\rho^*\eta = I^*((-1)^{n+1}\eta) = (-1)^{n+1}I^*\eta.$$

（1）如果 n 为奇数．由 $\rho_1^*(I^*\eta) = I^*\eta$ 和 ρ_1 为局部微分同胚，

我们构造$P^n(\boldsymbol{R})=S^n/\sim$上的 n 次 C^∞微分形式 ω,使得 $I^*\eta=\pi^*\omega$. 为此，设 $U\subset S^n$ 为开集，使得 $\pi_U:U\to\pi_U(U)\subset P^n(\boldsymbol{R})$，$\pi_U=\pi|_U$ 为微分同胚. 在 $\pi_U(U)$中，定义

$$\omega=(\pi_U^{-1})^*(I^*\eta).$$

如果 π_V 为另一微分同胚且 $\rho_1(U)=V$，则

$$\rho_1\circ\pi_V^{-1}=\rho_1^{-1}\circ\pi_V^{-1}=(\pi_V\circ\rho_1)^{-1}=\pi_U^{-1}$$

和$(\pi_U^{-1})^*(I^*\eta)=(\pi_V^{-1})^*\circ\rho_1^*(I^*\eta)=(\pi_V^{-1})^*(I^*\eta)$. 这就证明了 ω 为 $P^n(\boldsymbol{R})$上的整体 n 次 C^∞ 微分形式，且明显地有 $I^*\eta=\pi^*\omega$. 因为 $I^*\eta$ 在 S^n 上处处非 0，所以 ω 在 $P^n(\boldsymbol{R})$上也处处非 0. 根据定理 1, $P^n(\boldsymbol{R})$为 n 维可定向的 C^∞ 微分流形.

（2）如果 n 为偶数.（反证）假设 $P^n(\boldsymbol{R})$是可定向的，由定理 1, 存在 $P^n(\boldsymbol{R})$上的处处非 0 的 n 次 C^∞ 微分形式 ω. 因为

$$g(x)(I^*\eta)_x=(gI^*\eta)_x=(\pi^*\omega)_x=(\rho_1^*\circ\pi^*\omega)_x$$
$$=(\rho_1^*(gI^*\eta))_x=g(\rho_1(x))(\rho_1^*\circ I^*\eta)_x=-g(-x)(I^*\eta)_x,$$

其中 g 为 S^n 上处处非 0 的 C^∞ 函数. 从$(I^*\eta)_x\neq 0$ 推出 $g(x)=-g(-x)$ 和 $g(x)\cdot g(-x)<0$. 根据道路连通拓扑空间 S^n 上连续函数的 0 值定理，存在 $\xi\in S^n$ 满足 $g(\xi)=0$，这与 g 在 S^n 上处处非 0 相矛盾. 因而 $P^n(\boldsymbol{R})$是不可定向的.

例 5 Möbius 带$M=f([0,2\pi]\times(-\delta,\delta))$是不可定向的，其中 $f:[0,2\pi]\times(-\delta,\delta)\to\boldsymbol{R}^3$，使

$$f(u,v)=\left(2\cos u+v\sin\frac{u}{2}\cos u, 2\sin u+v\sin\frac{u}{2}\sin u, v\cos\frac{u}{2}\right)$$

$$=(2\cos u,2\sin u,0)+v\left(\sin\frac{u}{2}\cos u,\sin\frac{u}{2}\sin u,\cos\frac{u}{2}\right)$$

为 C^∞嵌入.

事实上，因为

$$f'_u(u,0)=(-2\sin u,2\cos u,0)$$

$$f_v'(u,0)=\left(\sin\frac{u}{2}\cos u,\ \sin\frac{u}{2}\sin u,\ \cos\frac{u}{2}\right)$$

即
$$\begin{pmatrix} f_*\dfrac{\partial}{\partial u} \\ \\ f_*\dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ \\ \sin\dfrac{u}{2}\cos u & \sin\dfrac{u}{2}\sin u & \cos\dfrac{u}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix},$$

法向量 $N(u,0)=f_u'(u,0)\times f_v'(u,0)=\left(2\cos\frac{u}{2}\cos u,\ 2\cos\frac{u}{2}\sin u,\right.$ $\left.-2\sin\frac{u}{2}\right)$, $\|N(u,0)\|=2\neq 0$. 再由 $C=\{(2\cos u, 2\sin u, 0)\mid 0\leqslant u\leqslant 2\pi\}$紧致,故存在 $\delta>0$, 使 $f:[0,2\pi]\times(-\delta,\delta)\to\boldsymbol{R}^3$ 为嵌入. 而 $N(0,0)=(2,0,0)$, $N(2\pi,0)=(-2,0,0)$. 所以 $N(u,0)$沿圆 C 走一圈后改变方向,根据定理 2, M 是不可定向的.

为了得到重要的 Stokes 定理,需要引进 n 维 C^∞ 流形 W 的开子流形M的 $n-1$ 维边界流形∂M的诱导定向,为此先证下面定理.

定理 3 设$(W,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 可定向流形, 定向为 $\mathscr{D}_1$, $(M,\mathscr{D}_M)$为$(W,\mathscr{D})$的开子流形. 则

(1) M 是可定向的;

(2) 如果 M 在 W 中的边界点集 ∂M 为 W 的 $n-1$ 维正则子流形,则 ∂M 是可定向的.

证明 (1) 设 $\mathscr{D}_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\mu\}$, 显然 $\mathscr{D}_{1M}=\{(M\cap U_\alpha,\varphi_\alpha|_{M\cap U_\alpha})\mid\alpha\in\mu\}$为 M 的一个定向.

(2) 因为∂M 为 W 的 $n-1$ 维正则子流形, 由第一章 §2 定理 3,对任何 $p\in\partial M$,存在 p 的局部坐标邻域(U,φ), $\{x^i\}$使得

$$\begin{aligned}&\varphi(M\cap U)=\varphi(U)\cap\{x\mid x^n>0\},\\ &\varphi(\partial M\cap U)=\varphi(U)\cap\{x\mid x^n=0\}\end{aligned}\qquad (*)$$

令 $\mathscr{D}_2=\{(U,\varphi),\ \{x^i\}\mid(U,\ \varphi)\in\mathscr{D}_1$ 且满足 $(*)\}$. 如果$(U_\alpha,$

φ_α), $\{x^i\}\in\mathscr{D}_2$, (U_β,φ_β), $\{y^i\}\in\mathscr{D}_2$, 则在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中, $\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}$

$=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]}$, 故由 $y^n=y^n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)\equiv 0$ 推出

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{n-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{n-1})}\cdot\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\bigg|_{x^n=0}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & 0\\ \cdots & & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} & 0\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n} & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{x_n=0}$$

$$=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\bigg|_{x^n=0}>0.$$

从

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\bigg|_{x^n=0}=\lim_{x^n\to 0^+}\frac{y^n(x^1,\cdots,x^{n-1},x^n)-y^n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)}{x^n-0}$$

$$=\lim_{x^n\to 0^+}\frac{y^n(x^1,\cdots,x^n)}{x^n}\geqslant 0$$

得到

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{n-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{n-1})}\bigg|_{x^n=0}>0.$$

于是,

$$\{(\partial M\cap U,\varphi|_{\partial M\cap U})\,|\,(U,\varphi)\in\mathscr{D}_2\}$$

确定了 ∂M 上的一个定向, 因而 ∂M 是可定向的. #

定义 2 在定理 3 中, 由 $\left\{(-1)^n\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right]}\,\middle|\,(U,\varphi),\right.$ $\left.\{x^i\,|\,i=1,\cdots n\}\in\mathscr{D}_2\right\}$ 所确定的 ∂M 的定向称为由 W 的定向 $\mathscr{D}_1$ (因而由 M 的定向 $\mathscr{D}_{1M}$) 确定的 ∂M 的**诱导定向**.

定向流形 $\vec{M}$ 上的微分形式的积分是数学分析中第二曲线、曲

面积分的推广．而这种积分的定义还必须应用近代数学中极其重要的单位分解的存在性．

定义 3 设$(M, \mathscr{D})$为n维C^∞仿紧的可定向流形，$\mathscr{D}_1$为其定向，记此定向流形为$\vec{M}$．ω为M上的n次C^∞外微分形式，$\text{Supp}\omega=\overline{\{x\in M \mid \omega(x)\neq 0\}}$为紧致集．$\{U_\alpha \mid (U_\alpha, \varphi_\alpha), \{x_\alpha^i\}\in\mathscr{D}_1, \alpha\in\mu\}$为$M$的局部有限的开覆盖，$\{g_\alpha \mid \alpha\in\mu\}$为从属于$\{U_\alpha \mid \alpha\in\mu\}$的单位分解，且$\text{Supp}\, g_\alpha$为紧致集．在$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，$\{x_\alpha^i\}$中，

$$g_\alpha\omega = g_\alpha\cdot a_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n,$$

显然，$\text{Supp}\, g_\alpha\omega\subset\text{Supp}\omega$为紧致集，故

$$\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(g_\alpha\cdot a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^n$$

为有限值．我们称

$$\begin{aligned}\int_{\vec{M}}\omega &= \int_{\vec{M}}\left(\sum_{\alpha\in\mu}g_\alpha\right)\omega = \int_{\vec{M}}\left(\sum_{\alpha\in\mu}g_\alpha\omega\right) = \sum_{\alpha\in\mu}\int_{\vec{M}}g_\alpha\omega \\ &= \sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(g_\alpha\cdot a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^n \\ &= \sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\underline{(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega}\end{aligned}$$

为ω在$\vec{M}$上的**积分**，其中$\underline{(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega}$为$\varphi_\alpha(U_\alpha)$的$n$次$C^\infty$外微分形式$(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega=a_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n$删去外积$\wedge$．因为$\text{Supp}\omega$紧致和$\{g_\alpha \mid \alpha\in\mu\}$关于单位分解的定义中的条件(2)，$\text{Supp}\omega$只与有限个$\text{Supp}g_\alpha$相交，因此上述的和中实际上只有有限项可能不为0．

引理 1 积分$\int_{\vec{M}}\omega$的定义与$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), g_\alpha \mid \alpha\in\mu\}$的选取无关，即积分的定义是合理的．

证明 设$\{V_\beta \mid (V_\beta, \psi_\beta), \{y_\beta^i\}\in\mathscr{D}_1, \beta\in\nu\}$为$M$的另一个局部有限的开覆盖，$\{f_\beta \mid \beta\in\nu\}$为从属于$\{V_\beta \mid \beta\in\nu\}$的单位分解．则在

$U_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$ 中，

$$\omega = a_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = b_\beta dy_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dy_\beta^n,$$

$$b_\beta = \frac{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)}{\partial(y_\beta^1, \cdots, y_\beta^n)} a_\alpha, \quad \frac{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)}{\partial(y_\beta^1, \cdots, y_\beta^n)} > 0.$$

于是，

$$\sum_{\alpha\in\mu} \int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)} (g_\alpha \cdot a_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$$

$$= \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\beta\in\nu} \int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)} (g_\alpha \cdot f_\beta \cdot a_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$$

$$= \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\beta\in\nu} \int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha\cap V_\beta)} (g_\alpha \cdot f_\beta \cdot a_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$$

$$= \sum_{\beta\in\nu} \sum_{\alpha\in\mu} \int_{\psi_\beta(M\cap V_\beta\cap U_\alpha)} (f_\beta \cdot g_\alpha \cdot b_\beta) \circ \psi_\beta^{-1}(y_\beta^1, \cdots, y_\beta^n) dy_\beta^1 \cdots dy_\beta^n$$

$$= \sum_{\beta\in\nu} \sum_{\alpha\in\mu} \int_{\psi_\beta(M\cap V_\beta)} (f_\beta \cdot g_\alpha \cdot b_\beta) \circ \psi_\beta^{-1}(y_\beta^1, \cdots, y_\beta^n) dy_\beta^1 \cdots dy_\beta^n$$

$$= \sum_{\beta\in\nu} \int_{\psi_\beta(M\cap V_\beta)} (f_\beta \cdot b_\beta) \circ \psi_\beta^{-1}(y_\beta^1, \cdots, y_\beta^n) dy_\beta^1 \cdots dy_\beta^n.$$

其中第 3 个等号是由 Riemann 积分的变量代替公式得到的. #

定理 4 设$(M, \mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 可定向的仿紧流形，$\mathscr{D}_1$ 为其定向，$\vec{M}$ 为其定向流形. ω, ω_1, ω_2 为 M 上的 n 次 C^∞ 微分形式，$\mathrm{Supp}\omega, \mathrm{Supp}\omega_1, \mathrm{Supp}\omega_2$ 为紧致集，$\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

(1) $\int_{\varepsilon\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_{\vec{M}} \omega$，其中 $\varepsilon = \pm 1$，$-\vec{M}$ 为与 $\vec{M}$ 定向相反的定向流形.

(2) $\int_{\vec{M}} (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda \int_{\vec{M}_1} \omega_1 + \mu \int_{\vec{M}} \omega_2$.

(3) 如果 M_1, M_2 为 M 的不相交的开集，$M = M_1 \cup M_2$，$\vec{M}_1$，$\vec{M}_2$ 与 $\vec{M}$ 的定向一致，则

$$\int_{\vec{M}}\omega=\int_{\vec{M}_1}\omega+\int_{\vec{M}_2}\omega.$$

证明 由定义 3 和 Riemann 积分的性质立即推得. 下面只证$\int_{-\vec{M}}\omega=-\int_{\vec{M}}\omega.$

设$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\ \{x_\alpha^i\}\mid\alpha\in\mu\}$ 为定义 3 中相应于$\vec{M}$的定向局部坐标系，则$\{(U_\alpha,\rho_{反}\circ\varphi_\alpha),\{y_\alpha^i\}\mid\alpha\in\mu,y_\alpha^i=x_\alpha^i,i=1,\cdots,n-1,y_\alpha^n=-x_\alpha^n\}$为定义 3 中相应于$-\vec{M}$ 的定向局部坐标系. $\{g_\alpha\mid\alpha\in\mu\}$为从属于它们的单位分解. 则在 U_α 中，

$$\omega=a_\alpha dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n=-a_\alpha dy_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dy_\alpha^n.$$

于是，

$$\begin{aligned}\int_{-\vec{M}}\omega&=\sum_{\alpha\in\mu}\int_{\rho_{反}\circ\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}-(g_\alpha\cdot a_\alpha)\circ(\rho_{反}\circ\varphi_\alpha)^{-1}\\&\qquad\cdot(y_\alpha^1,\cdots,y_\alpha^n)dy_\alpha^1\cdots dy_\alpha^n\\&=-\sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(g_\alpha\cdot a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^n\\&=-\int_{\vec{M}}\omega.\qquad\#\end{aligned}$$

定理 5(变量代换) 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为n维C^∞可定向的仿紧流形，$f:M_1\to M_2$为C^∞微分同胚. $\widetilde{\mathscr{D}}_1$为$M_1$的定向，$\vec{M}_1$为其定向流形，而$\{(f(U),\varphi\circ f^{-1})\mid(U,\varphi)\in\widetilde{\mathscr{D}}_1\}=\widetilde{\mathscr{D}}_2$为$M_2$所给定的定向，记此定向流形$\vec{M}_2=f_*\vec{M}_1$. ω为M_2上的n次C^∞微分形式，Suppω紧致，则$\int_{\vec{M}_1}f^*\omega=\int_{\vec{M}_2}\omega=\int_{f_*\vec{M}_1}\omega.$

证明 设$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\mu\}$为定义 3 中相应于$\vec{M}_2$的定向局部坐标系，$\{g_\alpha\mid\alpha\in\mu\}$ 为从属于它的单位分解. 而$\{(f^{-1}(U_\alpha),\varphi_\alpha\circ f)\mid\alpha\in\mu\}$为定义3中相应于$\vec{M}_1$的定向局部坐标系，$\{g_\alpha\circ f\mid\alpha\in\mu\}$为从属于它的单位分解. 于是，

$$\int_{\vec{M}_1} f^*\omega$$

$$=\sum_{\alpha\in\mu}\int_{(\varphi_\alpha\circ f)(M_1\cap f^{-1}(U_\alpha))}(g_\alpha\circ f)\circ(\varphi_\alpha\circ f)^{-1}\underline{((\varphi_\alpha\circ f)^{-1})^*(f^*\omega)}$$

$$=\sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M_2\cap U_\alpha)} g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}\underline{(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega}=\int_{\vec{M}_2}\omega. \qquad \#$$

在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，变量代换公式为

$$\int_{\vec{M}_2} a(y)dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$$

$$=\int_{\vec{M}_1} a(f(x))\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

这比通常的 Riemann 积分变换公式

$$\int_{M_2} a(y)dy^1\cdots dy^n=\int_{M_1} a(f(x))\left|\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|dx^1\cdots dx^n$$

的优越性在于除去了讨厌的绝对值号！

现在我们将定义 3 作一点推广，并可立即看出上述有关的定理也能类似推广，证明方法也是相同的，不再赘述. 这种推广有利于 Stokes 定理的叙述和证明.

定义 4 设 $(W,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 仿紧的可定向流形，$\mathscr{D}_1$ 为其定向，记此定向流形为 $\vec{W}$；M 为 W 的开子流形，而由 $\vec{W}$ 确定了定向流形 $\vec{M}$；∂M 为 M 的边界，或者它是空集，或者它是 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形. ω 为 W 上的 n 次 C^∞ 微分形式，且 $\mathrm{Supp}\omega=\overline{\{x\in W\mid\omega(x)\neq 0\}}$ 为紧致集. $\{U_\alpha\mid(U_\alpha,\varphi_\alpha),\ \{x_\alpha^i\}\in\mathscr{D}_1,\ \alpha\in\mu\}$ 为 W 上的开覆盖，$\{g_\alpha\mid\alpha\in\mu\}$ 为从属于 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\mu\}$ 的广义单位分解（参阅第一章 §3 定理 4，$\mathrm{Supp}g_\alpha$ 未必紧致，但 $\{\mathrm{Supp}g_\alpha\mid\alpha\in\mu\}$ 是局部有限的）. 在 $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$，$\{x_\alpha^i\}$ 中，显然紧致集 $\mathrm{Supp}\omega$ 的闭子集 $\mathrm{Supp}g_\alpha\omega\subset\mathrm{Supp}g_\alpha\subset U_\alpha$ 为紧致集. 以下 $\int_{\vec{M}}\omega$ 的定义和相应的定理的论述是与定义 3 完全类似的.

当取 $W=M,\partial M=\varnothing$ 时，定义 3 就成为它的特殊情形.

定理 6(Stokes 定理) 设$(W,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 仿紧的可定向流形，$\mathscr{D}_1$ 为其定向，$M\subset W$ 为开子流形，∂M 为 M 的边界，或者为空集或者为 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形. 相应于 $\mathscr{D}_1$ 的定向流形 $\vec{W}$ 确定了 $\vec{M}$ 和 ∂M 的诱导定向确定了$\overrightarrow{\partial M}$. ω 为 W 上的 $n-1$ 次C^∞ 微分形式，Suppω 是紧致的. $I:\partial M\to M$ 为包含映射，则

$$\int_{\vec{M}} d\omega=\int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*\omega \quad \left(\text{或}\int_{\overrightarrow{\partial M}}\omega|_{\partial M}, I^*\omega(X_1,\cdots X_{n-1})\right.$$

$$\left.=\omega|_{\partial M}(I_*X_1,\cdots I_*X_{n-1})\right).$$

在不致混淆的情形下，我们将 Stokes定理记作$\int_{\vec{M}} d\omega=\int_{\overrightarrow{\partial M}}\omega$. 若 $\partial M=\varnothing$，右边积分理解为 0.

证明 因为 M 为W 的开子流形和 ∂M 为 W 的 $n-1$ 维正则子流形，故可选取局部坐标系$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1,\alpha\in\mu$，使得$\partial M\cap U_\alpha=\varnothing$ 或者当 $\partial M\cap U_\alpha\neq\varnothing$ 时，

$$\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)=\varphi_\alpha(U_\alpha)\cap\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x^n>0\},$$

$$\varphi_\alpha(\partial M\cap U_\alpha)=\varphi_\alpha(U_\alpha)\cap\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x^n=0\}.$$

于是，存在 W 上的一个从属于$\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in\mu\}$ 的广义单位分解$\{g_\alpha|\alpha\in\mu\}$，它还诱导了$\partial M$ 上的一个广义单位分解$\{g_\alpha|_{\partial M}|\alpha\in\mu\}$. 从

引理 2 $\int_{\vec{M}} d(g_\alpha\omega)=\int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*(g_\alpha\omega)$.

立即得到(注意：除有限个 α 外，$g_\alpha\omega|_{M\cup\partial M}\equiv 0$)

$$\int_{\vec{M}} d\omega=\int_{\vec{M}} d\left(\sum_{\alpha\in\mu} g_\alpha\omega\right)=\int_{\vec{M}}\sum_{\alpha\in\mu} d(g_\alpha\omega)=\sum_{\alpha\in\mu}\int_{\vec{M}} d(g_\alpha\omega)$$

$$=\sum_{\alpha\in\mu}\int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*(g_\alpha\omega)=\int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*\left(\sum_{\alpha\in\mu} g_\alpha\omega\right)=\int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*\omega.$$

最后证明引理 2. 为此设$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$的局部坐标为$\{x^i\}$. 令

$$g_\alpha\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

则

$$d(g_\alpha\omega) = d\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

(1) $\partial M\cap U_\alpha = \varnothing$.

因为 $\varphi_\alpha(\mathrm{Supp}\ g_\alpha\omega)$紧致，故存在充分大的 R 使 a_i 可延拓为

$$[-R, R]^n = \{(x^1, \cdots, x^n)\,|\,-R\leqslant x^j\leqslant R, j=1, \cdots, n\}$$

上的 C^∞ 函数(此时 $\varphi_\alpha(\mathrm{Supp}\ g_\alpha\omega)\subset[-R, R]^n$), 使得

$$a_i\big|_{[-R,R]^n-\varphi_\alpha(U_\alpha)} = 0.$$

于是，$\displaystyle\int_{\overrightarrow{M}} d(g_\alpha\omega) = \int_{\varphi_\alpha(M\cap V_\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n$

$$= \int_{[-R,R]^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n = \sum_{i=1}^{n}\int_{[-R,R]^n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{[-R,R]^n} a_i\Big|_{x^i=-R}^{x^i=R} dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^n$$

$$= 0 = \int_{\overrightarrow{\partial M}} 0 = \int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*(g_\alpha\omega).$$

(2) $\partial M\cap U_\alpha \neq \varnothing$.

因为 $\varphi_\alpha(\mathrm{Supp}\ g_\alpha\omega)\cap\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x^n\geqslant 0\}$紧致，故存在充分大的 R, 使 a_i 可延拓为

$[-R, R]^{n-1}\times[0, R] = \{(x^1, \cdots x^n)\,|\,-R\leqslant x^j\leqslant R, j=1, \cdots, n-1, 0\leqslant x^n\leqslant R\}$上的 C^∞ 函数(此时 $\varphi_\alpha(\mathrm{Supp}\ g_\alpha\omega)\cap\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x^n\geqslant 0\}\subset$

$[-R,R]^{n-1}\times[0,R])$，使得

$$a_i\big|_{[-R,R]^{n-1}\times[0,R]-\varphi_\alpha(U_\alpha)}=0.$$

于是，$\displaystyle\int_{\overrightarrow{M}}d(g_\alpha\omega)=\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{[-R,R]^{n-1}\times[0,R]}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\int_{[-R,R]^{n-2}\times[0,R]}a_i\Big|_{x^i=-R}^{x^i=R}dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^n$$

$$+\int_{[-R,R]^{n-1}}a_n\Big|_{x^n=0}^{x^n=R}dx^1\cdots dx^{n-1}$$

$$=-\int_{[-R,R]^{n-1}}a_n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)dx^1\cdots dx^{n-1}$$

$$=-(-1)^n\int_{\overrightarrow{\partial M}}a_n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$$

$$=\int_{\overrightarrow{\partial M}}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\right)\Big|_{\partial M}$$

$$=\int_{\overrightarrow{\partial M}}(g_\alpha\omega)\,|_{\partial M}=\int_{\overrightarrow{\partial M}}I^*(g_\alpha\omega),$$

其中第 5 个等号是用到了 ∂M 的诱导定向的定义中的$(-1)^n$. #

在实际应用中，经常遇到 $M\cup\partial M$ 是紧致的，此时不必予先假定 Supp ω 是紧致的，只须假定 ω 为 U(W 中开集)上的 $n-1$ 次 C^∞ 微分形式，这里 $M\cup\partial M\subset U\subset W$.

由 $M\cup\partial M$ 紧致，存在 W 中的开集 V，使 $\bar{V}$ 紧致且 $M\cup\partial M\subset V\subset\bar{V}\subset U\subset W$，根据第一章 §3 推论 1，存在 C^∞ 函数 $\varphi: W\to \mathbf{R}$，使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1, x\in W$；$\varphi(x)=1, x\in M\cup\partial M$；Supp $\varphi\subset V$. 于是 $\varphi\omega$ 可视作 W 上的 $n-1$ 次 C^∞ 微分形式，且 Supp $\varphi\omega$ 紧致. 于是，对 $\varphi\omega$ 利用定理 6，

$$\int_{\overrightarrow{M}} d\omega = \int_{\overrightarrow{M}} d(\varphi\omega) = \int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*(\varphi\omega) = \int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*\omega.$$

在数学分析中，Newton-Leibniz 公式，Green 公式，Stokes 公式，Gauss 公式统一成 Stokes 定理，它是现在证明的 Stokes 定理的特例.

例 6　$\boldsymbol{R}^n$ 中 Stokes 定理的几个特殊情形(图 22).

(1) Newton-Leibniz 公式.

$M \subset \boldsymbol{R}^n$ 为 1 维 C^∞ 正则子流形，$\partial M = \{a, b\}$，$\overrightarrow{M}$ 为 1 维 C^∞ 定向流形，$\{t \mid t_0 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon, t_0 < t_1, \varepsilon > 0\}$ 为含 $\overrightarrow{M}$ 的定向局部坐标系. $\overrightarrow{\partial M} = \{-a, +b\}$ 为诱导定向所确定的流形. $\omega = f$，$d\omega = df$，则

$$\int_{\overrightarrow{M}} df = \int_{\overrightarrow{M}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \frac{df}{dt} dt$$

$$= f(x(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} = f(x(t_1)) - f(x(t_0)) = f(b) - f(a)$$

$$= f(x) \Big|_a^b$$

$$= \int_{\overrightarrow{\partial M}} f.$$

更特殊地，$W = \boldsymbol{R}^1$，$M = (a, b)$，$\partial M = \{a, b\}$，$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{(a, b)}$，$\overrightarrow{\partial M} = \{-a, +b\}$

$$\int_{\overrightarrow{M}} df = \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a) = \int_{\overrightarrow{\partial M}} f.$$

(2) Green 公式.

$W = \boldsymbol{R}^2$，M 为 $\boldsymbol{R}^2$ 中有界区域，∂M 为 C^∞ 封闭曲线，且为 1 维正则子流形. 定向流形 $\overrightarrow{W}$ 确定了 $\overrightarrow{M}$ 和诱导定向确定了流形 $\overrightarrow{\partial M}$. $\omega = p dx + q dy$，$d\omega = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx \wedge dy$，则

$$\int_{\overrightarrow{M}} d\omega = \int_{\overrightarrow{M}} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\overrightarrow{\partial M}} p dx + q dy = \int_{\overrightarrow{\partial M}} \omega.$$

(3) Stokes 公式.

$W=\boldsymbol{R}^3$, M 为 $\boldsymbol{R}^3$ 中 2 维 C^∞ 曲面，且为 2 维正则子流形，∂M 为 C^∞ 封闭曲线，且为 1 维正则子流形. 定向流形确定了 $\vec{M}$ 和诱导定向确定了 $\overrightarrow{\partial M}$. $\omega=pdx+qdy+rdz$,

$$d\omega=\begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ p & q & r \end{vmatrix},$$

$$\text{则}\quad \int_{\vec{M}} d\omega=\int_{\vec{M}}\begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$=\int_{\overrightarrow{\partial M}} pdx+qdy+rdz=\int_{\overrightarrow{\partial M}}\omega.$$

(4) Gauss 公式.

$W=\boldsymbol{R}^3$, M 为 $\boldsymbol{R}^3$ 中的有界开集，∂M 为 2 维 C^∞ 闭曲面，且为 2 维 C^∞ 正则子流形. 定向流形 $\vec{W}$ 确定了 $\vec{M}$ 和诱导定向确定了 $\overrightarrow{\partial M}$. $\omega=pdy\wedge dz+qdz\wedge dx+rdx\wedge dy$, $d\omega=\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial q}{\partial y}+\dfrac{\partial r}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$, 则

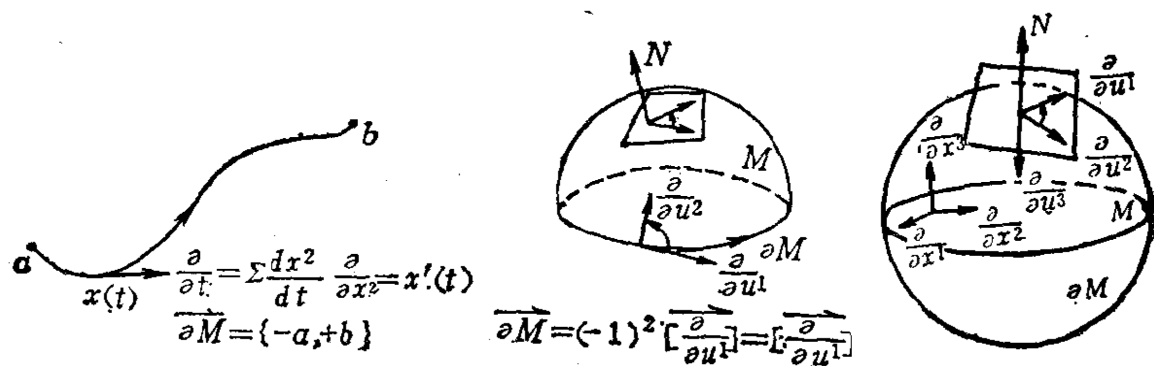


图 22

$$\int_{\overrightarrow{M}} d\omega = \int_{\overrightarrow{M}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= \int_{\overrightarrow{\partial M}} p dy \wedge dz + q dz \wedge dx + r dx \wedge dy.$$

第四章 Sard 定理、Brouwer 度和 Poincaré-Hopf 指数定理

本章§1证明了著名的 Sard 定理，并应用 Sard 定理和 Weierstrass 逼近定理证明了 Brouwer 不动点定理. §2 给出了从紧致 C^1 流形到连通 C^1 流形的 C^1 映射的 Brouwer 度的定义，然后再证明 Brouwer 度在 C^1 同伦下是不变的. 作为度的进一步应用，引进了 C^∞ 流形上 C^∞ 向量场在其孤立零点处指数的概念，并证明了局部与整体、微分拓扑与代数拓扑相联系的极其深刻的 Poincaré-Hopf 指数定理.

§1 Sard 定理

Sard 定理指出临界值的集合总是"微小的"，它的 Lebesgue 测度为 0.

定义 1 设 $(M_i, \mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 $C^r(r\geqslant 1)$ 流形，$i=1,2$，$f: M_1\to M_2$ 为 C^k 映射，$1\leqslant k\leqslant r$.

如果 $(\operatorname{rank} f)_p<n_2$，$p\in M_1$，则称 p 为 f 的**临界点**；如果 $(\operatorname{rank} f)_p=n_2$，$p\in M_1$，则称 p 为 f 的**正则点**.

如果 $q\in M_2$，使得 $f^{-1}(q)$ 至少包含一个临界点，则称它为**临界值**；M_2 中非临界值的点称为**正则值**.

记 $C_f\subset M_1$ 为 f 的临界点集，而 $R_f=M_1-C_f$ 为 f 的正则点集. 于是，$f(C_f)\subset M_2$ 为 f 的临界值集，而 $M_2-f(C_f)$ 为 f 的正则值集.

显然，若 $n_1<n_2$，则 $M_1=C_f$. 若 $q\in M_2-f(M_1)\subset M_2-f(C_f)$，则 q 为正则值.

定义 2 设 $B\subset\boldsymbol{R}^n$，如果对任何 $\varepsilon>0$，总存在至多可数个方体 $C(x_i,r_i)=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,|x^j-x_i^j|<r_i,\ j=1,\cdots,n\}$，$i\in\boldsymbol{N}$，使得 $B\subset\bigcup\limits_i C(x_i,r_i)$，且 $\sum\limits_i \mathrm{vol}C(x_i,r_i)=\sum\limits_i(2r_i)^n<\varepsilon$，其中 $\mathrm{vol}C(x_i,r_i)$ 表示 $C(x_i,r_i)$ 的体积，则称 B 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的**零测集**，记为 $\mathrm{meas}\,B=0$. 此时 B 的 Lebesgue 测度也为 0.

从定义 2 容易看出，$\boldsymbol{R}^n$ 中零测集的任何子集为零测集. 至多可数集为零测集. 至多可数个零测集的并为零测集.

定义 3 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 $C^r(r\geqslant1)$ 的 A_2（具有可数拓扑基）流形，$B\subset M$. 如果存在至多可数个 $(U_m,\varphi_m)\in\mathscr{D}$，$m\in\boldsymbol{N}$，使 $B=\bigcup\limits_m(B\cap U_m)$ 或 $B\subset\bigcup\limits_m U_m$，且 $\varphi_m(B\cap U_m)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集，则称 B 为**零测集**，记作 $\mathrm{meas}\,B=0$.

由定义 2 和 3 立即可知:

B 为零测集 $\Longleftrightarrow$ 对任何 $p\in B$，存在 p 的局部坐标系 $(U_p,\varphi_p)\in\mathscr{D}$，使得 $\varphi_p(B\cap U_p)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集;

$\Longleftrightarrow$ 对于任何 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$，$\varphi(B\cap U)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集.

定理 1 (Sard 定理) 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^r 的 A_2 流形 $(r\geqslant1)$，$i=1,\ 2$，$f:M_1\to M_2$ 为 C^k 映射，$1\leqslant k\leqslant r$. 如果 $k\geqslant1+\max\{n_1-n_2,0\}$，则 $\mathrm{meas}\,f(C_f)=0$.

证明参阅[Sternberg, P47—55].

我们对几个特殊情形（如定理 2、推论 1、定理 3）加以证明，其方法是极其有用的.

定理 2 设 $U\subset\boldsymbol{R}^n$ 为开集，$f:U\to\boldsymbol{R}^n$ 为 C^1 映射，$f=(f_1,\cdots,f_n)$，$\det Df(x)|_U=0$，则 $\mathrm{meas}f(C_f)=\mathrm{meas}f(U)=0$，其中 $Df(x)=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$.

证明 只须证明对 U 中任一边平行坐标轴的方体 U_0，都有

$\text{meas}\, f(U_0)=0$. 为此，将 U_0 的每一边分成 N 等分，得到 U_0 的 N^n 个大小相同的小方体．在小方体内任意取定一点 x_0，则对该小方体内的任一点 x，有

$$f(x)=f(x_0)+Df(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$
$$=f(x_0)+Df(x_0)(x-x_0)+o\left(\frac{1}{N}\right).$$

因为 $f:U\to \boldsymbol{R}^n$ 为 C^1 映射，且 $\det Df(x)|_U=0$，故我们总可设(必要时作适当的正交变换)

$$Df(x_0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x_0)\right)=\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

于是，对小方体内的任一点 x，

$$\begin{pmatrix} f_1(x)-f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_n(x)-f_n(x_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * \\ 0\cdots 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1-x_0^1 \\ \vdots \\ x^n-x_0^n\end{pmatrix}+o\left(\frac{1}{N}\right).$$

因此，在 U_0 上，显然存在正的常数(与 N 无关!)$K<+\infty$，使得上述每个小方体的象的(Lebesgue)测度不超过

$$K\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}\cdot o\left(\frac{1}{N}\right)=o\left(\frac{1}{N^n}\right).$$

这就得到了

$$0\leqslant \text{meas}\, f(U_0)\leqslant N^n\cdot o\left(\frac{1}{N^n}\right)\to 0\,(\text{当}\, N\to+\infty),$$

即 $\text{meas}\, f(U_0)=0$. #

推论 1 设 $U\subset \boldsymbol{R}^m$ 为开集，$m<n$，$f:U\to\boldsymbol{R}^n$ 为 C^1 映射，则 $\text{meas} f(C_f)=\text{meas} f(U)=0$.

证明 设 $\tilde{f}:U\times\boldsymbol{R}^{n-m}\to\boldsymbol{R}^n$，$\tilde{f}(x^1,\cdots,x^m,x^{m+1},\cdots,x^n)=f(x^1,\cdots,x^m)$. 显然，$\det D\tilde{f}|_{U\times\boldsymbol{R}^{n-m}}=0$，由定理 2，$\text{meas} f(U)=\text{meas}\tilde{f}(U\times\boldsymbol{R}^{n-m})=0$. #

定理 3 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为 n_i 维 C^∞ 的 A_2 流形，$i=1,2$，$f:M_1\to$

M_2 为 C^∞ 映射，则 $\text{meas} f(C_f)=0$.

证明 由 M_i 为 A_2 空间，$i=1,2$. 只须证明：设 $U\subset \boldsymbol{R}^{n_1}$ 为开集，$f:U\to \boldsymbol{R}^{n_2}$ 为 C^∞ 映射，C_f 为 f 在 U 中的临界点集，则 $\text{meas} f(C_f)=0$.

现应用归纳法证明．注意定理对 $n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 1$ 都有意义，$\boldsymbol{R}^0$ 由独点集组成，故当 $n_1=0$ 时定理为真．

令 $C_i=\left\{x=(x_1,\cdots,x_{n_1})\subset U \left| \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}(x)=0, 1\leqslant k\leqslant i\right.\right\}$，显然，$C_f\supset C_1\supset C_2\supset\cdots\supset C_i\supset C_{i+1}\supset\cdots$. 我们分三步来证明：

(1) $\text{meas} f(C_f-C_1)=0$.

当 $n_2=1$. $C_f=\{x\in U \mid (\text{rank} f)_x=0\}=\left\{x\in U \left| \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)=0\right.\right\}=C_1$. 所以，$\text{meas} f(C_f-C_1)=\text{meas} f(\varnothing)=0$.

当 $n_2\geqslant 2$. 对任何 $\bar{x}\in C_f-C_1$，由 $\bar{x}\,\bar{\in}\, C_1$，则必存在某个偏导数，如 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x})\neq 0$.

考虑映射 $h:U\to \boldsymbol{R}^{n_1}$, $h(x)=(f_1(x), x_2,\cdots,x_{n_1})$. 因为 $h_{*\bar{x}}$ 非退化，由反函数定理，存在 $\bar{x}$ 的某个开邻域 V，使 $h:V\to h(V)$ 为 C^∞ 同胚，其逆记为 $h^{-1}:h(V)\to V$. 令 $g=f\circ h^{-1}:h(V)\to \boldsymbol{R}^{n_2}$，显然 $C_g=h(V\cap C_f)$，因此 g 的临界值集 $g(C_g)=(f\circ h^{-1})(h(V\cap C_f))=f(V\cap C_f)$.

对于任何 $(t,x_2,\cdots,x_{n_1})\in h(V)$，由 $g(t,x_2,\cdots,x_{n_1})=f\circ h^{-1}(t, x_2,\cdots,x_{n_1})=f\circ h^{-1}(h(x))=f(x)=(f_1(x), f_2(x),\cdots, f_{n_2}(x))=(t,f_2(x),\cdots,f_{n_2}(x))\in t\times \boldsymbol{R}^{n_2-1}\subset \boldsymbol{R}^{n_2}$. 令

$$g^t:(t\times \boldsymbol{R}^{n_1-1})\cap h(V)\to t\times \boldsymbol{R}^{n_2-1}$$

表示 g 在 $t\times \boldsymbol{R}^{n_1-1}$ 上的限制．因为

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \left(\dfrac{\partial g_k^t}{\partial x_l}\right)\end{pmatrix},$$

故$(t,x_2,\cdots,x_{n_1})\in C_{g^t}\Longleftrightarrow(t,x_2,\cdots,x_{n_1})\in C_g$. 由归纳假设，meas $g^t(C_{g^t})=0$，于是，$\text{meas}(g(C_g)\cap(t\times \boldsymbol{R}^{n_2-1}))=\text{meas}g^t(C_{g^t})=0$，根据 Fubini 定理，得到 $\text{meas}\,f(V\cap C_f)=\text{meas}g(C_g)=0$，所以 $\text{meas}f(C_f-C_1)=0$.

(2) 对任何 $\bar{x}\in C_i-C_{i+1}$，有 $\bar{x}\bar{\in}C_{i+1}$，则必存在某个 $\dfrac{\partial^{i+1}f_r}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_{i+1}}}(\bar{x})\neq 0$，再由 $\bar{x}\in C_i$ 知 $\omega(x)=\dfrac{\partial^i f_r}{\partial x_{j_2}\cdots\partial x_{j_{i+1}}}$ 在 $\bar{x}$ 为 0，但$\dfrac{\partial\omega}{\partial x_{j_1}}(\bar{x})\neq 0$. 不妨设 $j_1=1$，则 C^∞ 映射 $h:U\to\boldsymbol{R}^{n_2}$，$h(x)=(\omega(x),x_2,\cdots,x_{n_1})$对$\bar{x}$ 的某开邻域V，使得 $h:V\to h(V)$为 C^∞ 同胚. 注意，由 C_i,ω，h的定义，$h(C_i\cap V)\subset\{0\}\times\boldsymbol{R}^{n_1-1}$. 令 $g=f\circ h^{-1}$: $h(V)\to\boldsymbol{R}^{n_2}$，$\bar{g}=g|_{\{0\}\times R^{n_1-1}}$：$(\{0\}\times\boldsymbol{R}^{n_1-1})\cap h(V)\to\boldsymbol{R}^{n_2}$. 由归纳知$\text{meas}\bar{g}(C_{\bar{g}})=0$. 由 $C_i,h,g,\bar{g}$ 的定义，$h(C_i\cap V)\subset C_{\bar{g}}$ (因所有阶数$\leqslant i$ 的偏导数为 0，$i\geqslant 1$). 所以，

$$
\begin{aligned}
0&=\text{meas}\bar{g}(h(C_i\cap V))=\text{meas}f\circ h^{-1}|_{\{0\}\times R^{n_1-1}}(h(C_i\cap V))\\
&=\text{meas}f(C_i\cap V),
\end{aligned}
$$

由于C_i-C_{i+1} 被至多可数个这种开集V所覆盖，从而推得 $\text{meas}f(C_i-C_{i+1})=0$.

(3) 当$i>\dfrac{n_1}{n_2}-1$时，$\text{meas}f(C_i)=0$.

令 $I\subset U$ 为边长等于δ 的闭方体. 若 $i>\dfrac{n_1}{n_2}-1$，则可证 $\text{meas}f(C_i\cap I)=0$. 因为 C_i 能被可数个这种立方体所覆盖，故 $\text{meas}f(C_i)=0$.

设 $x,x+\Delta x\in I$，由 Taylor 公式有

$$
f(x+\Delta x)=f(x)+R(x,\Delta x) \tag{1}
$$

再由 I 的紧致性和 C_i 的定义得到$\|R(x,\Delta x)\|\leqslant C\|\Delta x\|^{i+1}$，这里 C 为仅依赖于 f 和 I 的常数.

现在将 I 重分为 r^{n_1} 个边长为 $\frac{\delta}{r}$ 的小闭方体，$r\in N$. 令 I_1 为包含 $x\in C_i$ 的一个小方体，则对任何 $x+\Delta x\in I_1$，有 $\|\Delta x\|\leqslant\sqrt{n_1}\frac{\delta}{r}$. 根据(1)式 $f(I)$ 包含在以 $f(x)$ 为中心边长为 $2C\left(\frac{\sqrt{n_1}\delta}{r}\right)^{i+1}$ 的方体中，因此 $f(C_i\cap I)$ 包含在最多 r^{n_1} 个方体的并中，这些方体的总体积

$$V\leqslant r^{n_1}\left(2C\left(\frac{\sqrt{n_1}\delta}{r}\right)^{i+1}\right)^{n_2}$$

$$=(2C(\sqrt{n_1}\delta)^{i+1})^{n_2}r^{n_1-n_2(i+1)}\xrightarrow{\text{当 } i>\frac{n_1}{n_2}-1}0(r\to+\infty),$$

故 $\operatorname{meas}f(C_i\cap I)=0$.

综合(1)(2)(3)得到

$$0\leqslant\operatorname{meas}f(C_f)\leqslant\operatorname{meas}f(C_f-C_1)$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}\operatorname{meas}f(C_j-C_{j+1})+\operatorname{meas}f(C_i)=0,$$

$$\operatorname{meas}f(C_f)=0. \quad \#$$

注 1 只证第 1、第 2 步而不证第 3 步不能推出定理结论，因为 $\operatorname{meas}f\left(\sum_{j=1}^{\infty}C_i\right)$ 不知是否为 0.

推论 2 (A. B. Brown) 设 $f:M_1\to M_2$ 满足定理 1的条件，则正则值集 $M_2-f(C_f)$ 在 M_2 中是处处稠密的.

证明 对于任何 $p\in M_2$ 和 p 的任何开邻域 U_p，由 Sard 定理，$\operatorname{meas}f(C_f)=\operatorname{meas}(f(C_f)\cap U_p)=0$，故 $\operatorname{meas}(U_p-f(C_f)\cap U_p)=\operatorname{meas}U_p\neq 0$，所以存在 $q\in U_p-f(C_f)\cap U_p\subset M_2-f(C_f)$，这就证明了 $M_2-f(C_f)$ 在 M_2 中是处处稠密的. #

定理 4 设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$，$i=1,2$. $f:M_1\to$

M_2 为 C^r 映射，$q\in M_2$ 为 f 的正则值($n_1\geqslant n_2$)，则 $f^{-1}(q)\subset M_1$ 或为空集或为 n_1-n_2 维 C^r 正则子流形.

证明 因为 $q\in M_2$ 为 f 的正则值，故对任何 $p\in f^{-1}(q)$，$(\mathrm{rank}f)_p=n_2$，因而存在 M_1 中的 p 的开邻域 U_p，使得 $(\mathrm{rank}f)|_{U_p}=n_2$ 和 $\mathrm{rank}f|\bigcup\limits_{p\in f^{-1}(q)} U_p=n_2$. 根据第一章 § 2定理 4 可知 $f^{-1}(q)$ 或为空集，或为 M_1 中 n_1-n_2 维 C^r 正则子流形. 下面我们来直接证明本定理，设 $p\in f^{-1}(q)$，因为 q 为 f 的正则值，故 $(\mathrm{rank}\,f)_p=n_2$，$f_{*p}:T_pM_1\to T_qM_2$ 为满射，且 Kernel f_{*p} 为 n_1-n_2 维向量空间. 取 M_1 中的开集 $\widetilde{M}_1$ 使 $p\in\widetilde{M}_1\subset M_1$，且 $\widetilde{M}_1 C^r$ 嵌入 $\boldsymbol{R}^k$，不妨设 $\widetilde{M}_1\subset\boldsymbol{R}^k$.

选一线性映射 $L:\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^{n_1-n_2}$，使 L 在 f_{*p} 的核空间 Kernel $f_{*p}=(f_{*p})^{-1}(0)\subset T_p\widetilde{M}_1\subset\boldsymbol{R}^k$ 上非退化. 现在定义 C^r 映射 $F:\widetilde{M}_1\to M_2\times\boldsymbol{R}^{n_1-n_2}$，$F(x)=(f(x),L(x))$，显然，$F_{*p}(X)=(f_{*p}(X),L(X))$，$X\in T_p\widetilde{M}_1$，这里切向量按坐标观点定义. 于是，$F_{*p}$ 是非退化的. 根据反函数定理，F 将 p 的某个开邻域 U C^r 同胚地映到 $(q,L(p))=(f(p),L(p))$ 的一个开邻域 V 上. 应该注意的是 $f^{-1}(q)$ 在映射 F 下映到超平面 $q\times\boldsymbol{R}^{n_1-n_2}$ 中，且 F 将 $f^{-1}(q)\cap U$ C^r 同胚地映到 $(q\times\boldsymbol{R}^{n_1-n_2})\cap V$ 上. 这就证明了 $f^{-1}(q)\subset M_1$ 或者为空集，或者为 n_1-n_2 维 C^r 正则子流形. #

在第三章 § 3的Stokes 定理中，我们已经碰到了“带边流形” $M\cup\partial M$. 下面我们给出它的确切定义.

定义 4 设闭的半空间 $\boldsymbol{H}^n=\{(x^1,\cdots,x^n)\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x^n\geqslant 0\}$，其边界 $\partial\boldsymbol{H}^n=\{(x^1,\cdots,x^{n-1},0)\,|\,x^j\in\boldsymbol{R},j=1,\cdots,n-1\}=\boldsymbol{R}^{n-1}\times\{0\}\subset\boldsymbol{R}^n$.

如果 M 为 T_2 空间，且对任何 $p\in M$，都存在 p 在 M 中的开邻域 U 和同胚 $\varphi:U\to\varphi(U)$，其中 $\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^n$ 或 $\boldsymbol{H}^n$，且为开集，则称 M 为 **n 维带边拓扑流形或 C^0 带边流形.**

∂M 是在同胚 φ 下 M 中所有对应于 $\partial\boldsymbol{H}^n$ 的点的那些点构成

的集合．应用 Brouwer 区域不变性定理，∂M 是确切的，即 $p \in M$，若有两个上述的同胚 φ_1, φ_2，则 $\varphi_1(p) \in \partial \boldsymbol{H}^n \Longleftrightarrow \varphi_2(p) \in \partial \boldsymbol{H}^n$．称 ∂M 中的点为带边流形 M 的**边界点**，∂M 为**边界**，$M - \partial M$ 中的点为**内点**．

如果将第一章§1定义2中的拓扑流形改为带边拓扑流形，将凡碰到带边界点的局部坐标之间的 C^r 映射，总认为延拓到 $\boldsymbol{R}^n$ 中某开集上是 C^r 类的映射，于是可以得到 $C^r (r \geqslant 1)$ **带边微分流形**的定义．

不难看出 ∂M 为一个完全确定的 $n-1$ 维 C^r 流形，而内部 $M - \partial M$ 为一个 n 维 C^r 流形．

定理 5 设 $(M, \mathscr{D})$ 为 n 维 $C^r (r \geqslant 1)$ 流形，$g: M \to \boldsymbol{R}$ 为 C^r 函数，0 为 g 的正则值．则 $N = \{x \in M \mid g(x) \geqslant 0\}$ 为 n 维 C^r 带边流形，其边界为 $g^{-1}(0)$．

证明 如果 $p \in N$，且 $g(p) > 0$，由 g 的连续性，存在 p 在 M 中的开邻域 U_p，使得 $g|_{U_p} > 0$，故 $U_p \subset N$．

如果 $p \in N, p \in g^{-1}(0)$，因为 0 为 g 的正则值，故 $(\text{rank} g)_p = 1$，$g_{*p}: T_p M \to T_0 \boldsymbol{R}$ 为满射，且 kemelg_{*p} 为 $n-1$ 维向量空间．取 M 的开集 $\widetilde{M}$ 使 $p \in \widetilde{M} \subset M$，且 $\widetilde{M}$ C^r 嵌入 $\boldsymbol{R}^k$，不妨设 $\widetilde{M} \subset \boldsymbol{R}^k$．选一个线性映射 $L: \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^{n_1-1}$，使 L 在 Kernelg_{*p} 上非退化．

现在定义 C^r 映射 G：$\widetilde{M} \to \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{n-1} = \boldsymbol{R}^n$，$G(x) = (g(x), L(x))$，显然，$G_{*p}(X) = (g_{*p}(X), L(X))$，$X \in T_p \widetilde{M}$．于是，$G_{*p}$ 是非退化的．根据反函数定理，G 将 p 的某个开邻域 U C^r 同胚地映到 $(0, L(p)) = (g(p), L(p))$ 的一个开邻域 V 上．需注意的是 $g^{-1}(0)$ 在映射 G 下映到超平面 $\{0\} \times \boldsymbol{R}^{n-1}$ 中，且 G 将 $g^{-1}(0) \cap U$ C^r 同胚地映到 $(\{0\} \times \boldsymbol{R}^{n-1}) \cap V$ 上．这就证明了 $N = \{x \in M \mid g(x) \geqslant 0\}$ 为 n 维 C^r 带边流形，其边界为 $g^{-1}(0)$．　#

下面将定理 4 推广到带边流形．

定理 6 设$(M_1, \mathscr{D}_1)$为 n_1 维 $C^r(r\geqslant 1)$带边流形，$(M_2, \mathscr{D}_2)$为 n_2 维 C^r 流形，$n_1>n_2$，$f: M_1\to M_2$ 为 C^r 映射. 如果对 f 而言以及对限制映射 $f|_{\partial M_1}$ 而言，$q\in M_2$ 都是正则值，则 $f^{-1}(q)\subset M_1$ 为 n_1-n_2 维 C^r 带边流形，$\partial(f^{-1}(q))=f^{-1}(q)\cap\partial M_1$.

证明 因为要证明的是一个局部性质，所以只须证明特殊情形：$q\in \boldsymbol{R}^{n_2}$ 为 $f: \boldsymbol{H}^{n_1}\to \boldsymbol{R}^{n_2}$ 的正则值.

如果 $p\in f^{-1}(q)$为 $\boldsymbol{H}^{n_1}$ 的一个内点，如定理 4，$f^{-1}(q)$在 p 的一个开邻域中为 n_1-n_2 维 C^r 正则子流形.

如果 $p\in f^{-1}(q)$ 为 $\boldsymbol{H}^{n_1}$ 的边界点. 选取 p 在 $\boldsymbol{R}^{n_1}$ 中的一个开邻域 U 和 C^r 映射 $g: U\to \boldsymbol{R}^{n_2}$，使得 $g|_{U\cap \boldsymbol{H}^{n_1}}=f|_{U\cap \boldsymbol{H}^{n_1}}$. 因为 p 为 f 的因而也是 g 的正则点，故我们可以假定 g 在 U 中无临界点(否则用更小的开邻域代替 U). 因此，$g^{-1}(q)\subset \boldsymbol{R}^{n_1}$ 为 n_1-n_2 维 C^r 正则子流形.

设 π: $g^{-1}(q)\to \boldsymbol{R}$ 为坐标投影，$\pi(x^1, \cdots, x^{n_1})=x^{n_1}$. 因为 $g^{-1}(q)$在点 $p\in\pi^{-1}(0)$处的切空间等于 $g_{*p}=f_{*p}$: $\boldsymbol{R}^{n_1}\to \boldsymbol{R}^{n_2}$ 的核空间 $\mathrm{Ker} g_{*p}=\mathrm{Ker} f_{*p}$(由 $g(g^{-1}(q))=q$，故 $g_{*p}(T_p g^{-1}(q))=0$，又因维数 $\dim(T_p g^{-1}(q))=n_1-n_2=\dim(\mathrm{Ker} g_{*p})$，所以$T_p g^{-1}(q)=\mathrm{Ker} g_{*p}=g_{*p}^{-1}(0)$). 由假定 $f|_{\partial \boldsymbol{H}^{n_1}}$ 在 p 点处是正则的，故 $f_{*p}^{-1}(0)\cap T_p(\partial \boldsymbol{H}^{n_1})=(f|_{\partial \boldsymbol{H}^{n_1}})_{*p}^{-1}(0)$为 n_1-n_2-1 维向量空间，而 $\dim(f_{*p}^{-1}(0))=n_1-n_2$，则 $f_{*p}^{-1}(0)=g_{*p}^{-1}(0)\not\subset \boldsymbol{R}^{n_1-1}\times\{0\}$. 因为 $\pi_{*p}^{-1}(0)=\boldsymbol{R}^{n_1-1}\times\{0\}$，所以存在 $X\in T_p g^{-1}(q)$，使 $\pi_{*p}X\neq 0$，这就证明了$(\mathrm{rank}\pi)_p=1$，从而 0 为 π 的一个正则值(必要的话用更小的邻域代替 U).

根据定理5，$g^{-1}(q)\cap \boldsymbol{H}^{n_1}=f^{-1}(q)\cap U=\{x\in g^{-1}(q)\mid \pi(0)\geqslant 0\}$ 为 n_1-n_2 维 C^r 的带边流形，其边界为 $\pi^{-1}(0)$. 这就完成了定理的证明. #

例 1　第一章 § 2例11中，$S^n=\{x\in \boldsymbol{R}^{n+1}\Big|\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\}\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ 为 n 维 C^ω 正则子流形．现另证如下：考虑 C^ω 映射 $f: \boldsymbol{R}^{n+1}\to \boldsymbol{R}$，$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2$，显然任意 $q\neq 0$ 都是 f 的正则值，由定理4 $S^n=f^{-1}(1)$ 为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的 n 维 C^ω 正则子流形．

例 2　设 $g: \boldsymbol{R}^{n+1}\to \boldsymbol{R}$，$g(x)=1-\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2$ 为 C^ω 映射，0 为 g 的正则值，由定理 5，$D^{n+1}=\{x\in \boldsymbol{R}^{n+1}|g(x)=1-\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2\geqslant 0\}$ 为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的 $n+1$ 维 C^ω 带边流形，其边界为 $g^{-1}(0)=\{x\in \boldsymbol{R}^{n+1}|g(x)=1-\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2\}=S^n$，它是 n 维 C^ω 正则子流形．

应用Sard 定理和定理 6 可以证明下面的定理 7，由此可证明定理 8 和经典的 Brouwer 不动点定理．

定理 7　设 M 为紧致的 n 维 $C^r(r\geqslant 1)$ 带边流形，则不存在 C^1映射 $f: M\to\partial M$，使 $f|_{\partial M}=\mathrm{Id}_{\partial M}$．

证明　（反证）假设存在 C^1 映射 $f: M\to\partial M$，使 $f|_{\partial M}=\mathrm{Id}_{\partial M}$．由 Sard 定理，存在 $q\in\partial M$ 为 f 的正则值，自然 q 也是 $f|_{\partial M}=\mathrm{Id}_{\partial M}$ 的正则值，由定理 6，$f^{-1}(q)$为M 的 1 维 C^1 带边流形，其边界为 $\partial f^{-1}(q)=f^{-1}(q)\cap\partial M=\{q\}$．但 $f^{-1}(q)$也是紧致的，而紧致 1 维 C^1 流形必为有限个圆周和闭线段的 C^1 同胚象的不相交的并（参阅[J. W. 米尔诺，熊金城译，62—64 页]）．所以 $\partial f^{-1}(q)$ 必定由偶数个点组成，这与 $\partial f^{-1}(q)=\{q\}$为独点集相矛盾．＃

例 3　因为 $D^{n+1}=\{x\in \boldsymbol{R}^{n+1}\Big|\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2\leqslant 1\}$ 是以单位球面S^n

为边界的 $n+1$ 维 C^∞ 紧致带边流形. $n\in\{0\}\cup N$，作为定理 7 的特殊情形，Id_{S^n} 不能延拓为C^1 映射 $f: D^{n+1}\to\partial D^{n+1}=S^n$.

定理 8 设 $g: D^{n+1}\to D^{n+1}$ 为 C^1 映射，则 g 必有不动点，即存在 $x\in D^{n+1}$，使 $g(x)=x$.

证明 （反证）假设 g 没有不动点，则对任何 $x\in D^{n+1}$，令 $f(x)\in S^n$ 为连 $g(x)$ 和 x 的直线交 S^n 且离 x 较近的那个点. 令

$$f(x)=x+tu=x+t\frac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|},$$

则 $1=\langle f(x),f(x)\rangle=\langle x+tu,x+tu\rangle=\langle x,x\rangle+2t\langle x,u\rangle$

$$+t^2\langle u,u\rangle=\langle x,x\rangle+2t\langle x,u\rangle+t^2,$$

$$t^2+2\langle x,u\rangle t+\langle x,x\rangle-1=0,$$

因为 $t>0$，故 $t=\dfrac{-2\langle x,u\rangle+2\sqrt{\langle x,u\rangle^2-(\langle x,x\rangle-1)}}{2}$

$$=-\langle x,u\rangle+\sqrt{\langle x,u\rangle^2-\langle x,x\rangle+1}.$$

由于 $u=\dfrac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|}$为 x 的 C^1 映射，故 t 为 x 的 C^1 函数和 $f: D^{n+1}\to S^n$ 为 C^1 映射，且 $f|_{\partial D^{n+1}}=f|_{S^n}=\mathrm{Id}_{S^n}$，这与定理 7 的结论相矛盾.

定理 9 **（Brouwer不动点定理）** 设 $g: D^{n+1}\to D^{n+1}$为连续映射，则 g 必有不动点，即存在 $x\in D^{n+1}$，使 $g(x)=x$.

证明 任给 $\varepsilon>0$，由 Weierstrass 逼近定理（参阅[Dieudonné, J., p133]），存在多项式映射$P_1: R^{n+1}\to R^{n+1}$，使$\|p_1(x)-g(x)\|<\varepsilon, x\in D^{n+1}$. 然而 P_1 可能将D^{n+1} 的点变为 D^{n+1} 外的点.

令 $P(x)=\dfrac{P_1(x)}{1+\varepsilon}$，显然$\|P(x)\|=\left\|\dfrac{P_1(x)}{1+\varepsilon}\right\|\leqslant\dfrac{\|g(x)\|+\varepsilon}{1+\varepsilon}\leqslant\dfrac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon}=1$, $P(D^{n+1})\subset D^{n+1}$，且

$$\|P(x)-g(x)\|=\left\|\frac{P_1(x)}{1+\varepsilon}-g(x)\right\|\leqslant\left\|\frac{P_1(x)}{1+\varepsilon}-P_1(x)\right\|+\|P_1(x)$$

$$-g(x)\| \leqslant \|P_1(x)\| \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\varepsilon \leqslant (1+\varepsilon) \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\varepsilon=2\varepsilon,$$

$x \in D^{n+1}$.

(反证)假设 $g(x) \neq x, x \in D^{n+1}$. 则连续函数 $\|g(x)-x\|$ 在紧致集 D^{n+1} 上达最小值 $\mu=\min\{\|g(x)-x\| \mid x \in D^n\}=\|g(\xi)-\xi\|>0$, $\xi \in D^n$. 如上选多项式映射 $P: D^{n+1} \to D^{n+1}$, 使 $\|P(x)-g(x)\|<\mu$, $x \in D^{n+1}$. 易见,

$\|P(x)-x\| \geqslant \|g(x)-x\|-\|P(x)-g(x)\| \geqslant \mu-\|P(x)-g(x)\|$ >0, 所以, $P(x) \neq x$, 即 C^ω 映射 $P: D^{n+1} \to D^{n+1}$ 无不动点, 这与定理 8 的结论相矛盾. #

注 2 从定理 9 的证明方法看出, 为了证明关于连续映射的一个命题, 首先对 $C^k(k \geqslant 1)$ 映射证明, 然后用逼近定理过渡到连续映射情形.

§2 Brouwer 度

本节给出从紧致 C^1 流形到连通 C^1 流形的 C^1 映射的 Brouwer 度的定义, 然后再证明 Brouwer 度在 C^1 同伦下是不变的.

引理 1 设 M_i 为 n 维 C^1 流形, $i=1,2$. $f: M_1 \to M_2$ 为 C^1 映射, $y \in M_2$ 为 f 的正则值, M_1 紧致, 则 $f^{-1}(y)$ 为有限集(包括空集).

证 1 (反证)假设 $f^{-1}(y)$ 为无限集, 则存在不同的 $x_k \in f^{-1}(y)$, $k=1,2,\cdots$. 因为 $f^{-1}(y)$ 作为紧致空间 M_1 的闭子集总是紧致的. 故 x_k 必有收敛子列, 不妨设 x_k 收敛于 x_0, 且 $x_0 \in f^{-1}(y)$. 因为 y 为 f 的正则值, 由反函数定理, 存在 x_0 的开邻域 U, 使 $f: U \to f(U)$ 为 C^1 同胚, 故 $f|_U$ 为一一映射. 但因 $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k=x_0$, 存在 $N \in \mathbf{N}$, 当 $k>N$ 时, $x_k \in U$, 此时, $f(x_k)=f(x_0)$, 这与 $f|_U$ 为一一映射相矛盾. #

证 2 不失一般性, 只须对 $U, f(U)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中开集加以证明. 因

$0=f(x_k)-f(x_0)=Df(x_0)(x_k-x_0)+o(\|x_k-x_0\|)$，故

$$x_k-x_0=-Df(x_0)^{-1}\cdot o(\|x_k-x_0\|),$$

其中取 $x_k\neq x_0$. 于是，$1=\left\|Df(x_0)^{-1}\cdot\frac{o(\|x_k-x_0\|)}{\|x_k-x_0\|}\right\|\to 0\ (k\to+\infty)$，矛盾. #

定义 1 设 M_i 为 n 维定向 C^1 流形，$i=1,2$. M_1 是紧致的，M_2 是连通的，f: $M_1\to M_2$ 为 C^1 映射. 则对于任一 f 的正则值 $y\in M_2-f(C_f)$，称

$$\deg(f;y)=\sum_{x\in f^{-1}(y)}\operatorname{sign} f_{*x}$$

为 f **关于正则值 y 的 Brouwer 度**. 其中 $x\in f^{-1}(y)$ 为 f 的正则点，所以 $f_{*x}: T_xM_1\to T_{f(x)}M_2$ 为有向向量空间之间的线性同构，

$$\operatorname{Sign} f_{*x}=\begin{cases}+1, & f_{*x}\text{ 保持定向},\\ -1, & f_{*x}\text{ 反转定向}.\end{cases}$$

由引理 1，$f^{-1}(y)$ 为有限集，故上述 $\sum_{x\in f^{-1}(y)}$ 是有意义的. 如果 $f^{-1}(y)=\varnothing$，自然定义 $\deg(f;y)=0$. 显然，$\deg(f;y)$ 为一整数.

引理 2 $\deg(f;y)$ 为定义在 M_2 的稠密开子集 $M_2-f(C_f)$ 上的局部常值函数，且它在 $M_2-f(C_f)$ 的每个道路连通分支（也是连通分支）上为常值函数.

证明 由§1推论 2，$M_2-f(C_f)$ 在 M_2 中处处稠密. 易见正则点集 M_1-C_f 为 M_1 中的开集，故 C_f 为 M_1 中的闭集. 又因 M_1 紧致，所以 C_f 也紧致，这就推出了连续映射 f 下的象即临界值集 $f(C_f)$ 为 M_2 的紧致子集，故它为 M_2 的闭集，从而 $M_2-f(C_f)$ 为 M_2 中的开集.

为证明 $\deg(f;y)$ 作为 y 的函数（其中 y 只取正则值！）是局部常值的，只须构造 y 的一个开邻域 $V\subset M_2$，使得对于任何 $y'\in V$ 有 $\deg(f;y')=\deg(f;y)$. 由引理 1，设 x_1，…，x_k 为 $f^{-1}(y)$的全部

点，选取这些点的两两不相交的开邻域 $U_1, \cdots, U_k$，使 $x_i \in U_i$，$\text{Sign}\, f_{*x}|_{U_i} = \text{Sign} f_{*x_i}$ 且 f C^1 同胚地将 U_i 映到 M_2 中的开集 V_i 上，于是，令

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} V_i - f(M_1 - \bigcup_{i=1}^{k} U_i).$$

类似于 $f(C_f)$ 的证法可知 $f\left(M_1 - \bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)$ 为 M_2 的紧致集和闭集，因此 V 为 M_2 中的开集，显然，$y \in V$ 且 $\deg(f; y')|_V = \deg(f; y)$.

设 W 为 $M_2 - f(C_f)$ 的任一连通分支，令

$$W_1 = \{y' \in W \mid \deg(f; y') = \deg(f; y)\},$$

$$W_2 = \{y' \in W \mid \deg(f; y') \neq \deg(f; y)\},$$

由 $\deg(f; \cdot)$ 为局部常值函数，故 W_1, W_2 都为开集，又因 $y \in W_1$ 和 W 连通以及 $W = W_1 \cup W_2, W_1 \cap W_2 = \varnothing$，所以 $W_2 = \varnothing, W_1 = W$，即 $\deg(f, \cdot)$ 在 $M_2 - f(C_f)$ 的每个(道路)连通分支上为常值函数. #

引理 3 设 M_1 为 $n+1$ 维 C^1 带边定向紧致流形. ∂M_1 为 M_1 的边界，它是 M_1 的 n 维 C^1 正则紧致子流形，以诱导定向为其定向，M_2 为 n 维连通定向流形. 如果 C^1 映射 $f: \partial M_1 \to M_2$ 可以延拓为 C^1 映射 $F: M_1 \to M_2$，则对于 f 的每个正则值 y，必有 $\deg(f; y) = 0$.

证明 先设 y 既是 $f = F|_{\partial M_1}$ 的正则值又是 F 的正则值. 紧致的 1 维 C^1 带边流形 $F^{-1}(y)$(由 § 1 定理 6)为闭线段和圆周的 C^1 同胚象的不相交的有限并. 只有弧(闭线段的 C^1 同胚象) 有边界点，且在 ∂M_1 上. 令 $A_1, \cdots, A_k$ 为 $F^{-1}(y)$ 中的弧的全体，而 $\partial A_i = \{a_i, b_i\}, i = 1, \cdots, k$. 下面证明: $\text{Sign}\, f_{*a_i} + \text{Sign}\, f_{*b_i} = 0$. 因此，$\deg(f; y) = \sum_{i=1}^{k} (\text{Sign}\, f_{*a_i} + \text{Sign} f_{*b_i}) = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0$.

M_1 的定向和 M_2 的定向决定 A_i 的一个如下的定向：令 $(X_1, \cdots, X_{n+1})$ 为 T_xM 的一个正的有向基，其中 X_1 与 A_i 相切. X_1 决定 T_xA_i 的定向为所需要的定向 $\Longleftrightarrow F_{*x}$ 将 $(X_2, \cdots, X_{n+1})$ 变为 T_yM_2 的正有向基. 此时，因为 $F|_{A_i}=y$，故 $F_{*x}(X_1)=0$.

令 $X_1(x)$ 表示在点 x 处与 A_i 相切的正向单位向量（作为线段的 C^1 同胚象，即 σ: $[0, 1]\to A_1$ 为 C^1 同胚，则令 $\left\langle \lambda\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right), \mu\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)\right\rangle=\lambda\mu$，因而 $\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$ 为 x 处与 A_i 相切的单位切向量）. 显然 X_1 为 C^1 类的，并且 $X_1(x)$ 在一个边界点（设为 b_i）上指向 M_1 的外边，此时如果选 $X_2(b_i), \cdots, X_{n+1}(b_i)$ 为 $T_{b_i}\partial M_1$ 的一个基，则 $\overrightarrow{[X_2(b_i), \cdots, X_{n+1}(b_i)]}$ 恰为 ∂M_1 的诱导定向（参阅第三章§3定义 2），即 ∂M_1 在 b_i 的正向，故 $\text{Sign}\, f_{*b_i}=+1$；而在另一个边界点 a_i 上指向 M_1 的内部，类似推理可知 $-\overrightarrow{[X_2(a_i), \cdots, X_{n+1}(a_i)]}$ 恰为 ∂M_1 的诱导定向，即 ∂M_1 在 a_i 的正向，故 $\text{Sign}\, f_{*a_i}=-1$（图 23）.

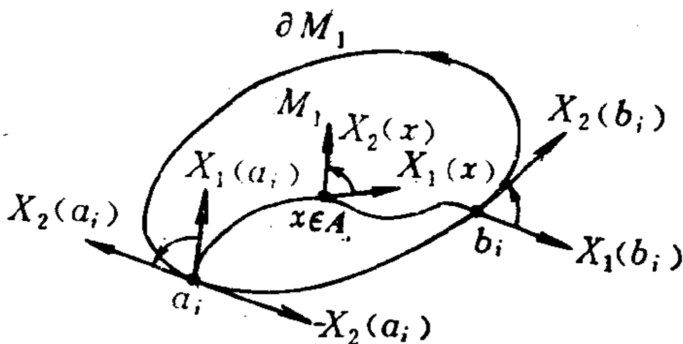


图 23

一般地，设 y 为 f 的正则值但不是 F 的正则值. 由引理 2，$\deg(f; z)$ 在 y 的某个开邻域 U 中为常数. 因此，我们可以在 U 中取到 F 的一个正则值 z（由引理 2 正则值的稠密性），从而

$$\deg(f; y)=\deg(f; z)=0.$$

这就证明了引理 3. #

引理 4 设 M_1 为 n 维紧致定向 C^1 流形，M_2 为 n 维连通定向 C^1 流形，F: $[0,1]\times M_1\to M_2$ 为连结 C^1 映射 $f(x)=F(0,x)$ 与 $g(x)=F(1,x)$ 之间的 C^1 同伦．对于 f,g 的任意共同的正则值 y，$\deg(f;y)=\deg(g;y)$ （图 24）．

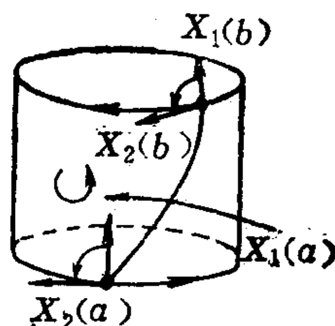


图 24

证明 由 $[0,1]$ 的通常的定向和 M_1 的定向确定了积流形 $[0,1]\times M_1$ 的定向（如果 t 为 $[0,1]$的坐标，$\{o_x=[\overrightarrow{X_1(x),\cdots,X_n(x)}]\,|\,x\in M_1\}$ 为 M_1 的定向，则 $\left\{\left[\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t},X_1(x),\cdots,X_n(x)}\right]\middle|x\in M_1\right\}$ 为$[0,1]\times M_1$ 的定向），并且$\{1\}\times M_1$ 具有由$[0,1]\times M_1$ 的定向确定的诱导定向，而$\{0\}\times M_1$ 具有与由$[0,1]\times M_1$ 的定向确定的诱导定向相反的定向．于是，由引理 3，

$$0=\deg(F|_{\partial([0,1]\times M_1)},y)=\deg(g;y)-\deg(f;y),$$

则 $\deg(f;y)=\deg(g;y)$． #

定理 1 整数 $\deg(f;y)$不依赖于正则值 y 的选取．

证明 若 y,z 都是 f: $M_1\to M_2$ 的正则值，由于 M_2 为连通的 n 维 C^1 流形，故根据第二章 § 4 定理 6（相应的定理中将 C^∞ 改为 C^1，切向量改为坐标观点定义），选取同痕于 Id_{M_2} 的 C^1 同胚 h: $M_2\to M_2$，使 $h(y)=z$．显然，h 保持 M_2 的定向，且

$$\deg(h\circ f;h(y))=\sum_{x\in(h\circ f)^{-1}(h(y))}\mathrm{Sign}(h\circ f)_{*x}$$

$$= \sum_{x \in f^{-1} \circ h^{-1}(h(y))} \mathrm{Sign}(h_{*f(x)} \circ f_{*x}) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{Sign}\, f_{*x}$$

$= \deg(f; y)$.

如果 F: $[0,1] \times M_2 \to M_2$ 为连结 h 和 Id_{M_2} 的 C^1 同伦，则G: $[0,1] \times M_1 \to M_2$, $G(t,x) = F(t, f(x))$, $G(0,x) = F(0, f(x)) = h \circ f(x)$, $G(1,x) = F(1, f(x)) = \mathrm{Id}_{M_2}(f(x)) = f(x)$. 于是，$G$ 为连结$h \circ f$ 和 f 的 C^1 同伦. 根据引理 4, $\deg(h \circ f; z) = \deg(f; z)$, 从而 $\deg(f; y) = \deg(h \circ f; h(y)) = \deg(h \circ f; z) = \deg(f; z)$. #

定义 2 称定理 1 中与正则值 y 无关的整数 $\deg(f; y)$ 为 f 的**度**，记作 $\deg f$.

定理 2 如同引理 4，F 为连结 f 和 g 的 C^1 同伦，则

$$\deg f = \deg g.$$

证明 因 $\mathrm{meas}\, f(C_f) = 0 = \mathrm{meas}\, g(C_g)$, 故 $\mathrm{meas}(f(C_f) \cup g(C_g)) = 0$. 于是，存在 $y \in M_2 - (f(C_f) \cup g(C_g))$ 为 f 和 g 的正则值. 由定理 1 和引理 4 有

$$\deg f = \deg(f; y) = \deg(g; y) = \deg g. \quad \#$$

例 1 定义 1 中，(1)常值映射 c: $M_1 \to M_2$, $c(x) = y_0$, 则取 $y \neq y_0$, 有

$$\deg c = \deg(c; y) = \sum_{x \in c^{-1}(y) = \phi} \mathrm{Sign}\, c_{*x} = 0.$$

(2) 如果 f: $M_1 \to M_2$ 为 C^1 同胚，则

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) = \{x\}} \mathrm{Sign} f_{*x} = \mathrm{Sign} f_{*x} = \begin{cases} +1, & f \text{ 保持正向}, \\ -1, & f \text{ 反转定向}. \end{cases}$$

(3) 如果 $M_1 = M_2 = M$ 为紧致连通的 C^1 流形，f: $M \to M$ 为反转定向的 C^1 同胚，则 f 不 C^1 同伦于 Id_M. (反证)假设 f C^1 同伦于 Id_M, 则由引理 4,

$-1 = \deg(f, y) = \deg(\mathrm{Id}_M; y) = 1$, 矛盾.

例 2 应用引理 3 可证 § 1 定理 7. (反证) 假设存在 C^1 映射

$f: M\to\partial M$ 使 $f|_{\partial M}=\mathrm{Id}_{\partial M}$. 由引理 3,对 $f|_{\partial M}$ 的正则值 y 有

$$0=\deg(f|_{\partial M};y)=\deg(\mathrm{Id}_{\partial M};y)=\mathrm{Sign}(\mathrm{Id}_{\partial M})_{*y}=1,\text{矛盾}.$$

例 3 $f: S^1\to S^1$, $e^{i\eta}=f(e^{i\theta})=e^{ik\theta}$, $k\in\mathbf{Z}$. 则 $\frac{\partial\eta}{\partial\theta}=k$, 因 $\frac{\partial}{\partial\theta}$ 确定了 S^1 的定向,故

$$\deg f=\deg(f;e^{i\frac{\pi}{2}})=\begin{cases}0, & k=0,\\ \sum\limits_{j=0}^{|k|-1}\mathrm{Sign}f_{*e^{i\left(\frac{2j\pi}{k}+\frac{\pi}{2k}\right)}}, & k\neq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & k=0,\\ |k|\cdot\mathrm{Sign}k, & k\neq 0\end{cases}=k.$$

例 4 反射 r_j: $S^n\to S^n$ 定义为 $r_j(x^1, \cdots, x^{n+1})=(x^1, \cdots, -x^j,\cdots,x^{n+1})$. 易见它是反转定向的 C^ω 同胚.

对径映射 $r: S^n\to S^n$, $r(x)=-x=r_1\circ r_2\circ\cdots\circ r_{n+1}(x)$ 的度

$$\deg r=\sum_{x\in r^{-1}(y)}\mathrm{Sign}r_{*x}=\mathrm{Sign}r_{*(-y)}=(-1)^{n+1}.$$

于是,当 n 为偶数时,S^n 的对径映射 r 不 C^1 同伦于 Id_{S^n}. (反证)假设 r C^1 同伦于 Id_{S^n}, 则由定理 2, $-1=(-1)^{n+1}=\deg r=\deg\mathrm{Id}_{S^n}=1$, 矛盾

例 5 S^n 上有处处非 0 的 C^1 切向量场 $\Longleftrightarrow n$ 为奇数.

($\Leftarrow$) 设奇数 $n=2m-1$, 则令

$$X(x^1,\cdots,x^{2m})=(x^2,-x^1,x^4,-x^3,\cdots,x^{2m},-x^{2m-1}),$$

因为 $\langle x,X\rangle=0$, 故 $X(x)$ 为 S^n 在 x 的切向量,显然 X 是 S^n 上的 C^ω 单位切向量场.

($\Rightarrow$) 如果 S^n 上有一个处处非 0 的 C^1 切向量场 X, 则 F: $[0,1]\times S^n\to S^n$, $F(\theta,x)=x\cos\pi\theta+\frac{X(x)}{\|X(x)\|}\sin\pi\theta$ 为连结 $F(0,x)=x=\mathrm{Id}_{S^n}(x)$ 与 $F(1, x)=-x=r(x)$ 的 C^1 同伦 (注意 $\langle F(\theta,x), F(\theta,x)\rangle=\cos^2\pi\theta+\sin^2\pi\theta=1$). 于是, S^n 的对径映射 r C^1 同伦

于 $\mathrm{Id}S^n$. 由例 4，当 n 为偶数时这是不可能的. 因此，n 必为奇数. #

§3 C^∞切向量场的指数和 Poincaré-Hopf 指数定理

作为度的概念的进一步应用，现在研究 C^∞流形上的 C^∞切向量场在其孤立零点处的指数和 Poincaré-Hopf 定理. 为定义指数概念，需先证几个引理.

引理 1 设$U\subset \boldsymbol{R}^n$为开集，$X: U\to TU=U\times \boldsymbol{R}^n$为 C^∞切向量场，$p\in U$ 为 X 的孤立零点. 如果$\{x^i\}$为$\boldsymbol{R}^n$的通常的直角坐标系，

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta^i_j=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j,\end{cases}$$

$$\|X(x)\|=\sqrt{\left\langle\sum_{i=1}^n a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_{j=1}^n a^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^n a^i(x)^2},$$

$S^{n-1}(r)=\{x\in \boldsymbol{R}^n\,|\,\|x-p\|<r\}\subset U$，则映射

$$\overline{X}(x)=\frac{X(x)}{\|X(x)\|}:S^{n-1}(r)\to S^{n-1}$$

的度 $\deg\overline{X}|S^{n-1}(r)$与上述 r 的选取无关，称为X在 p 的指数.

证明 设 $0<r_1<r_2, S^{n-1}(r_i)\subset U,\ i=1,\ 2$. 令$F:[0,\ 1]\times S^{n-1}\to S^{n-1}$, $F(t,y)=\overline{X}(((1-t)r_1+tr_2)y)$, $F(0,y)=\overline{X}(r_1y)=\overline{X}(x)|_{S^{n-1}(r_1)}$, $F(1,y)=\overline{X}(r_2y)=\overline{X}(x)|_{S^{n-1}(r_2)}$. 根据§2定理 2，$\deg\overline{X}|_{S^{n-1}(r_1)}=\deg F(0,\ \cdot\ )=\deg F(1,\ \cdot\ )=\deg\overline{X}|_{S^{n-1}(r_2)}$. #

引理 2 设$f:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}^n$为保持定向的$C^\infty$微分同胚，且$f(p)=p$. 则存在连接 f 和$\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n}$的 C^∞同痕 $F:[0,1]\times \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}^n$, $F(t,p)=p$.

证明 先假定 $f(0)=0$. 令 $G:[0,1]\times \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}^n$,

$$G(t,x)=\begin{cases}\dfrac{f(tx)}{t}, 0<t\leqslant 1,\\ \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{f(ux)}{u}, t=0.\end{cases}$$

其中$\lim_{u\to 0^+}\frac{f(ux)}{u}=\lim_{u\to 0^+}\frac{f(ux)-f(0)}{u-0}$

$$=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)ux^i}{u}+\frac{o(\|ux\|)}{u}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)x^i.$$

由第二章§3定理1的证明可看出，$f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x^i$，其中$f_1$，…，$f_n$为$C^\infty$函数．则对所有的$t\in\boldsymbol{R}$，$G(t,x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(tx)x^i$，$G(0,x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(0)x^i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)x^i$，$G(1,x)=f(x)$．于是，$f$ C^∞同痕于线性映射

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)x^i=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x^1}(0)\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x^n}(0)\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x^1}(0)\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x^n}(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}.$$

由第二章§1可知，存在C^0映射$\sigma:[0,1]\to\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})^+$，使$\sigma(0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(0)\right)$，$\sigma(1)=I_n$($n$阶单位矩阵)．但是，如果应用2维平面的旋转和归纳法可证，必有一C^∞道路将$O(n)^+$中任一点(行列式为1的正交矩阵)与I_n相连．因此，上述的σ可以取C^∞映射．于是，$H:[0,1]\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$，$H(t,x)=\sigma(t)x$为连接$H(0,x)=\sigma(0)x=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)x^i$和$H(1,x)=\sigma(1)x=I_nx=x=\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n}(x)$的$C^\infty$同痕．根据$C^\infty$同痕的传递性，存在连接$f$和$\mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^n}$的$C^\infty$同痕$F:[0,1]$

$\times R^n \to R^n$，且显然有 $F(t,0)=0$.

对于一般保持定向的 C^∞ 微分同胚 $f:R^n\to R^n$，$f(p)=p$，由上面的证明知，存在 C^∞ 同痕 $K:[0,1]\times R^n\to R^n$，使 $k(0,y)=f(p+y)-f(p)=f(p+y)-p$，$K(1,y)=\mathrm{Id}_{R^n}(y)$. 于是，$F:[0,1]\times R^n\to R^n$，$F(t,x)=K(t,x-p)+f(p)=K(t,x-p)+p$，$F(t,p)=p$，$F(0,x)=K(0,x-p)+p=f(x)$，$F(1,x)=K(1,x-p)+p=\mathrm{Id}_{R^n}(x)$，它就是连接 f 和 Id_{R^n} 的所要求的 C^∞ 同痕. #

推论 1 设 $U\subset R^n$ 为凸开集，$p\in U$，$f:U\to R^n$，$f(p)=p$ 为保持定向的 C^∞ 嵌入，则存在 C^∞ 映射 $F:[0,1]\times U\to R^n$，使得 $F(0,x)=f_0(x)=f(x)$，$F(1,x)=f_1(x)=\mathrm{Id}_U(x)$，$F(t,p)=f_t(p)=p$，而 $F(t,\cdot)=f_t(\cdot):U\to R^n$ 为单参数嵌入族.

证明 类似引理 2 的证明，只须相应的部分改为

$$G,H,F:[0,1]\times U\to R^n,$$

$$f:U\to R^n,$$

$$K:[0,1]\times\{y\in R^n\mid p+y\in U\}\to R^n. \qquad \#$$

引理 3 设 $U,V\subset R^n$ 为开集，$f:U\to V$ 为 C^∞ 微分同胚，X 为 U 上的 C^∞ 切向量场，它在 f 下对应于 V 上的 C^∞ 切向量场为

$$Y=f_*\circ X\circ f^{-1},$$

则 X 在孤立零点 p 处的指数等于 Y 在 $f(p)$ 处的指数.

证明 由于 C^∞ 切向量场在孤立零点处的指数在平移 $f(x)=x+h$ 下不变，故不妨设 $p=f(p)=0$.

因为 C^∞ 切向量场在孤立零点 p 处的指数完全由该切向量场在充分靠近 p 的小球面上的值决定，故不失一般性，U 为凸开集.

当 f 保持定向时，由推论 1，可构造 C^∞ 的单参数嵌入族 $F(t,\cdot)=f_t(\cdot):U\to R^n$，使得 $f_0=f$，$f_1=\mathrm{Id}_U$，$f_t(0)=0$. 从 F 的 C^∞ 性和 $[0,1]$ 的紧致性可知，存在 $r>0$，使得

$$S^{n-1}(r)\subset\bigcap_{t\in[0,1]}f_t(U).$$

令与U上的C^∞切向量场X相对应的$f_t(U)$上的C^∞切向量场为$X_t=f_{t*}\circ X\circ f_t^{-1}$. 这些切向量场在点$O$为中心的充分小的球面上都是非零的，设此球面为$S^{n-1}(r)$. 因此，

$$\overline{X}_t(x)=\frac{X_t(x)}{\|X_t(x)\|}:[0,1]\times S^{n-1}(r)\to S^{n-1}$$

为连接 $\overline{X}_0(x)=\dfrac{f_*\circ X\circ f^{-1}(x)}{\|f_*\circ X\circ f^{-1}(x)\|}=\overline{Y}(x)$ 和 $\overline{X}_1(x)=\dfrac{X(x)}{\|X(x)\|}=\overline{X}(x)$ 的C^∞同伦. 根据 §2 定理2, $\deg\overline{Y}(x)|_{S^{n-1}(r)}=\deg\overline{X}(x)|_{S^{n-1}(r)}$，这就证明了$X$在孤立零点处的指数等于$Y$在0的指数.

当$f=\rho$, $\rho(x^1,\cdots,x^n)=(x^1,\cdots,x^{n-1},-x^n)$为反射时，显然

$$Y=\rho_*\circ X\circ\rho^{-1}=\rho\circ X\circ\rho^{-1},\quad \overline{Y}=\frac{Y}{\|Y\|}=\frac{\rho\circ X\circ\rho^{-1}}{\|\rho\circ X\circ\rho^{-1}\|}=\rho\circ\frac{X}{\|X\|}\circ\rho^{-1}=\rho\circ\overline{X}\circ\rho^{-1}.$$

由此可从切向量与积分曲线在C^∞微分同胚下的关系可知$\deg\overline{Y}|_{S^{n-1}(r)}=\deg\overline{X}|_{S^{n-1}(r)}$.

当f为任何反转定向的C^∞微分同胚时，$f\circ\rho$为保定向的C^∞微分同胚且

$$\begin{aligned}Y&=f_*\circ X\circ f^{-1}=(f\circ\rho\circ\rho)_*\circ X\circ(f\circ\rho\circ\rho)^{-1}\\&=(f\circ\rho)_*\circ(\rho_*\circ X\circ\rho^{-1})\circ(f\circ\rho)^{-1}.\end{aligned}$$

由上面已证的结果立即看出Y与$\rho_*\circ X\circ\rho^{-1}$在0点处的指数相等，$\rho_*\circ X\circ\rho^{-1}$与$X$在0点处的指数相等，故$Y$与$X$在0点处的指数也相等. #

定义1 设X为n维C^∞流形$(M,\mathscr{D})$上的C^∞切向量场. $p\in M$为X的孤立零点(即X在p的某开邻域中只有一个零点). 任选p的局部坐标系$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$，我们定义$X$在$p$点的**指数**为$\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1}$在$\varphi(p)$点的指数. 由引理3它与$p$的局部坐标系$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$的选取无关，因此上述指数的定义是确切的，并记为$\mathrm{Ind}_pX$.

例 1 设 $M=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^2$ 为复平面，$X(z)=z^k$ $(k\in\boldsymbol{N})$ 确定了 M 上的一个 C^∞ 切向量场，0 为其孤立零点. 由 §2 例 3，

$$\operatorname{Ind}_0 X=\deg X(z)|_{S^1}=k.$$

类似地，$X(z)=\bar{z}^k(k\in\boldsymbol{N})$ 或 $(\|z\|^2,0)=(x^2+y^2,0)$ 确定了 M 上的一个 C^∞ 切向量场，0 为其孤立零点. 由 §2例 3，$\operatorname{Ind}_0 X=\deg X(z)|_{S^1}=-k$ 或 0.

例 2 设 $S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 为通常的 C^∞ 微分流形，$X(x)=p-\langle p,x\rangle x$, $x\in S^n$, $p=(0,\cdots,0,1)$ 为北极. 因为 $\langle X(x),x\rangle=\langle p,x\rangle-\langle p,x\rangle\cdot\langle x,x\rangle=0$，故 X 为 S^n 上的 C^∞ 切向量场，它恰有两个孤立零点 p 和 $-p$.

先考虑孤立零点 p，设 $U_1=S^n-(0,\cdots,0,-1)$，$\varphi_1:U_1\to\{(x^1,\cdots,x^n,1)|x^i\in\boldsymbol{R},i=1,\cdots,n\}=\varphi_1(U_1)$ 为南极 $(-p=(0,\cdots,0,-1))$ 投影，则 $\varphi_{1*}\circ X\circ\varphi_1^{-1}$ 为 $\varphi_1(U_1)$ 上的 C^∞ 切向量场，它在每一点的切向量都指向中心 $(0,\cdots,0,1)$. 因此，由 §2例 4，

$$\operatorname{Ind}_p X=\operatorname{Ind}_{\varphi_1(p)}\varphi_{1*}\circ X\circ\varphi_1^{-1}=\deg\left.\frac{\varphi_{1*}\circ X\circ\varphi_1^{-1}}{\|\varphi_{1*}\circ X\circ\varphi_1^{-1}\|}\right|_{S^{n-1}}$$

$$=\deg(-x)|_{S^{n-1}}=(-1)^n.$$

类似地，$\operatorname{Ind}_{-p}X=\operatorname{Ind}_{\varphi_2(-p)}\varphi_{2*}\circ X\circ\varphi_2^{-1}$

$$=\deg\left.\frac{\varphi_{2*}\circ X\circ\varphi_2^{-1}}{\|\varphi_{2*}\circ X\circ\varphi_2^{-1}\|}\right|_{S^{n-1}}=\deg x|_{S^{n-1}}=1,$$ 其中 φ_2 为北极投影.

定理 1（Poincaré-Hopf 指数定理） 设 M 为 n 维 C^∞ 紧致流形，X 为 M 上只具有孤立零点的 C^∞ 切向量场（因而孤立零点只有有限个），则

$$\sum_{X(x)=0}\operatorname{Ind}_x X=\chi(M)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i(M),$$

其中 $\chi(M)$ 为 M 的 Euler 示性数，$b_i(M)$ 为 M 的第 i 个 Betti 数，即同调群 $H_i(M;\boldsymbol{R})$ 的秩.

注 1 Poincaré-Hopf 定理指出，C^∞切向量场的指数和是M的一个拓扑不变量，它不依赖于C^∞切向量场的特殊选取．另外，C^∞切向量场在孤立零点处的指数是其局部性质，而本定理得到的结果却是整体性质．因此，这是反映局部和整体，微分拓扑和代数拓扑之间相联系的极其深刻的定理．这一定理的 2 维情形是由 Poincaré 在 1885 年证明的．全部定理证明是由 Hopf 在 1926年完成的．另一证明参阅[Bott, R. and Tu, L. W.]．下面先证明一系列的引理．

引理 4(Hopf) 设$U\subset R^n$为n维C^∞紧致带边流形，$X: U\to TU$为只具有孤立零点的C^∞切向量场，并且在边界∂U上X指向U的外面，则

$$\sum_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_x X=\deg N,$$

其中$N:\partial U\to S^{n-1}, x\longmapsto N(x)$($x$处的向外的单位法向量，然后移到$R^n$的原点，图 25）为$n-1$维超曲面$\partial U$的 Gauss 映射．特别地，这指数和不依赖于$X$的选取．

证明 设$x_1, \cdots, x_k\in U-\partial U=U^0$为$U$中$X$的全部孤立零点

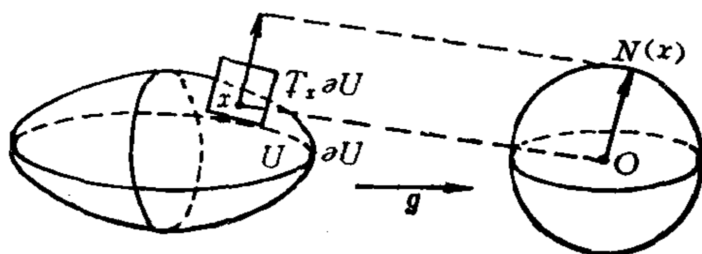


图 25

（因为在∂U上X指向U的外面，故$X(x)\neq 0, x\in\partial U$），取$\varepsilon>0$，使得$\varepsilon$-球体$\overline{O(x_i,\varepsilon)}\subset U^0, i=1,\cdots,k$，且彼此不相交，于是得到一个新的带边流形$U-\bigcup\limits_{i=1}^{k}O(x_i,\varepsilon)$．显然，

$$\overline{X}(x)=\frac{X(x)}{\|X(x)\|}: U-\bigcup_{i=1}^{k} O(x_i,\varepsilon)\to S^{n-1}$$

为 C^∞映射($\overline{X}(x)$移到 $\boldsymbol{R}^n$的原点). 因为 $\overline{X}|_{\partial U}C^\infty$同伦于$N$(应用平面旋转),且每个小球面 $\partial O(x_i,\varepsilon)$ 上的诱导定向恰与它通常的定向相反,再由 §2 引理 3 得到

$$\begin{aligned}0&=\deg\overline{X}|_{\partial U\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\partial O(x_i,\varepsilon)\right)}=\deg\overline{X}|_{\partial U}+\sum_{i=1}^{k}\deg\overline{X}|_{\partial O(x_i,\varepsilon)}\\&=\deg N-\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Ind}_{x_i}X,\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_x X=\deg N$. #

定义 2 设 X 为 n 维 C^∞流形M上的 C^∞切向量场, p 为 X 的孤立零点. 在 p 的局部坐标系(U_1, φ_1), $\{u^i\}$中, $X=\sum\limits_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial u^i}$, $(a^1,\cdots,a^n)|_p=(0,\cdots,0)$, 如果$\left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j}(p)\right)$为非异矩阵, 则称 p 为 X 的**非退化零点**, 否则称为**退化零点**. 容易验证上述定义与局部坐标系的选取无关. 设(U_2, φ_2), $\{v^i\}$为p的另一局部坐标系, $X=\sum\limits_{k=1}^{n}b^k\frac{\partial}{\partial u^k}$. 则$b^k=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial v^k}{\partial u^i}a^i$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial b^k}{\partial v^l}(p)\right)&=\left.\left(\sum_{i,s=1}^{n}\frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i\partial u^s}\frac{\partial u^s}{\partial v^l}a^i+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\frac{\partial a^i}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\right)\right|_p\\&=\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\right)\left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j}(p)\right)\left(\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\right).\end{aligned}$$

显然, $\left(\frac{\partial b^k}{\partial v^l}(p)\right)$非异$\Longleftrightarrow\left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j}(p)\right)$非异,

$$\mathrm{Sign}\left(\frac{\partial b^k}{\partial v^l}(p)\right)=\mathrm{Sign}\left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j}(p)\right).$$

令 $Y=\varphi_{1*}\circ X\circ\varphi_1^{-1}$，它为 $\varphi_1(U_1)$ 上的 C^∞ 切向量场，将 Y 视作 $\varphi_1(U_1)\to \boldsymbol{R}^n, u\longmapsto (a^1(u),\cdots,a^n(u))$ 的映射，则 p 为 X 的非退化零点 $\Longleftrightarrow Y_{*\varphi_1(p)}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 是非退化的.

引理 5 非退化零点 p 为 X 的孤立零点，且

$$\mathrm{Ind}_pX=\begin{cases}+1, & \det J_{Y*\varphi_1(p)}=\det\left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j}(p)\right)>0,\\ -1, & \det J_{Y*\varphi_1(p)}=\det\left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j}(p)\right)<0,\end{cases}$$

其中 $J_{Y*\varphi_1(p)}$ 为 $Y_{*\varphi_1(p)}$ 的 Jacobi 矩阵.

证明 因为 p 为 X 的非退化零点，故

$$\det J_{Y*\varphi_1(p)}=\det\left(\frac{\partial a^i}{\partial u^j}(p)\right)\neq 0,$$

由反函数定理，Y 可看成从 $\varphi_1(p)$ 的某凸开邻域 U_0 到 $\boldsymbol{R}^n$ 中某开集的 C^∞ 微分同胚，且 $\varphi_1(p)$ 为 Y 的孤立零点，从而 p 为 X 的孤立零点. 不失一般性，令 $\varphi_1(p)=0$.

如果 $\det J_{Y*\varphi_1(p)}>0$，即 Y 保持定向，由推论 1，$Y|_{U_0}$ 能 C^∞ 形变为 Id_{U_0} 而不引入任何新的零点. 因此，$\mathrm{Ind}_pX=\mathrm{Ind}_{\varphi_1(p)}Y=\mathrm{Ind}_0Y=\mathrm{Ind}_0\mathrm{Id}_{U_0}=+1$.

如果 $\det J_{Y*\varphi_1(p)}<0$，即 Y 反转定向，则 $Y|_{U_0}$ 类似地能 C^∞ 形变为反射，故 $\mathrm{Ind}_pX=-1$. #

引理 6 设 p 为 n 维 C^∞ 正则子流形 $M\subset\boldsymbol{R}^k$ 上的 C^∞ 向量场 X 的孤立零点，将 X 看作 $M\to\boldsymbol{R}^k$ 的映射($X(x)$ 移到原点)，则 p 点的 Jacobi 映射 $X_{*p}:T_pM\to T_0\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^k$ 将 T_pM 映到 $T_pM\subset\boldsymbol{R}^k$ (移到原点). 如果这个线性映射的行列式 $D\neq 0$，则 p 为 X 的孤立零点，且 $\mathrm{Ind}_pX=\begin{cases}+1, D>0,\\ -1, D<0.\end{cases}$

证明 设(U,φ)，$\{u^i\}$为p的局部坐标系，$h=\varphi^{-1}:\varphi(U)\to M$，则$\left\{t_i=h_{*u}\left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)=\dfrac{\partial h}{\partial u^i}\right\}$为切空间$T_{h(u)}M$的基. 令$\sum_{j=1}^{n}a^j\dfrac{\partial}{\partial u^j}=Y=\varphi_{*x}(X)=(h^{-1})_{*x}\circ X\circ h(u)$，$x=h(u)=\varphi^{-1}(u)$. 于是，$X\circ h(u)=h_{*u}(Y)=\sum_{j=1}^{n}a^jh_{*u}\left(\dfrac{\partial}{\partial u^j}\right)=\sum_{j=1}^{n}a^jt_j$和$X_{*x}(t_i)=X_{*x}\circ h_{*u}\left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)$

$$=(X\circ h)_{*u}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\frac{\partial(X\circ h(u))}{\partial u^i}=\frac{\partial\left(\sum_{j=1}^{n}a^jt_j\right)}{\partial u^i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a^j}{\partial u^i}t_j+$$

$\sum_{j=1}^{n}a^j\dfrac{\partial t_j}{\partial u^i}$，再根据$a^j(h^{-1}(p))=a^j(\varphi(p))=0$得到

$$X_{*p}(t_i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a^j}{\partial u^i}(h^{-1}(p))t_j\in T_pM,$$

这就证明了X_{*p}为$T_pM\to T_pM$的线性映射且行列式$D=\det\left(\dfrac{\partial a^j}{\partial u^i}(h^{-1}(p)\right)$. 对向量场$Y$应用引理5并结合定义2得到，当$D=\det\left(\dfrac{\partial a^j}{\partial u^i}(h^{-1}(p))\right)\neq 0$时，$h^{-1}(p)=\varphi(p)$为$Y$的孤立零点，从而$p$为$X$的孤立零点，且

$$\operatorname{Ind}_pX=\operatorname{Ind}_{\varphi(p)}Y=\begin{cases}+1, & \det\left(\dfrac{\partial a^j}{\partial u^i}(h^{-1}(p))\right)=D>0,\\ -1, & \det\left(\dfrac{\partial a^j}{\partial u^i}(h^{-1}(p))\right)=D<0.\end{cases}\qquad \#$$

引理7 设$M\subset \mathbf{R}^k$为n维紧致C^∞流形，则存在$\varepsilon>0$，使得$U_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^k\mid$存在$y\in M$使$\|x-y\|\leqslant\varepsilon\}$为$k$维$C^\infty$带边流形.

如果X为M上的只具有非退化零点的任意C^∞切向量场，则

$$\sum_{X(x)=0}\operatorname{Ind}_xX=\deg N,$$

其中 $N:\partial U_\varepsilon\to S^{k-1}$为$\partial U_\varepsilon$的 Gauss 映射. 特别地，这指数和不依赖于 C^∞ 向量场 X 的选取(图 26).

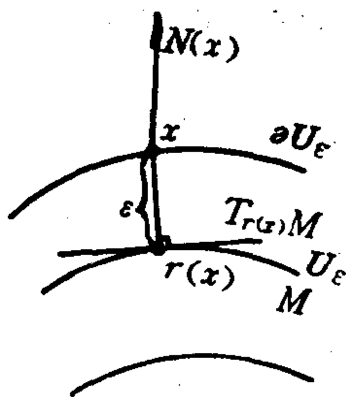


图 26

证明 参阅[J. W. 米尔诺，熊金城译, 59 页问题 11，12，110页]和[Munkres, J. R., p. 51][1]可知，存在 $\varepsilon>0, U_\varepsilon$ 为 k 维 C^∞带边流形. 对于 $x\in U_\varepsilon, r(x)\in M$为$M$中离 x 最近的点，此时 $x-r(x)\perp T_{r(x)}M$ ($\perp$表示正交或垂直，即对任何 $v\in T_{r(x)}M, \langle x-r(x), v\rangle=0$)，且当 ε 充分小时，$r(x)$为 C^∞映射.

考虑距离平方函数 $f(x)=\|x-r(x)\|^2=\langle x-r(x), x-r(x)\rangle$. 因为 $x-r(x)$为 $r(x)$处的法向量，$\dfrac{\partial r}{\partial x^j}$为 $r(x)$处的切向量，故

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}=\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{k}(x^i-r_i(x))^2\right)}{\partial x^i}=2\sum_{i=1}^{k}(x^i-r_i(x))\left(\delta_j^i-\frac{\partial r_i}{\partial x^j}\right)$$

$$=2(x^j-r_j(x))-\left\langle x-r(x), \frac{\partial x}{\partial x^j}\right\rangle=2(x^j-r_j(x)),$$

于是，f 在 $\mathbf{R}^k$中通常$\left(\text{关于}\left\langle\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta_j^i\right)$的梯度场为

$$\operatorname{grad} f=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}=2(x-r(x)).$$

因此，等高超曲面$\partial U_\varepsilon=f^{-1}(\varepsilon^2)$上每一点$x$ 的向外的单位法向量为

$$N(x)=\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}=\frac{x-r(x)}{\varepsilon}.$$

将 X 延拓为U_ε上的 C^∞向量场Y，使得

$$Y(x)=(x-r(x))+X(r(x)).$$

因为 $X(r(x))$和 $x-r(x)$ 分别为 $r(x)$ 处关于M的切向量和法向

量，所以当 $x\in\partial U_\varepsilon$ 时有

$$\langle Y(x),\ N(x)\rangle=\frac{\langle x-r(x),x-r(x)\rangle}{\varepsilon}+\left\langle X(r(x)),\ \frac{x-r(x)}{\varepsilon}\right\rangle$$

$$=\varepsilon>0,$$

即 Y 在边界 ∂U_ε 上指向外(法向量 $N(x)$ 的一边)．此外，显然有 $Y=0\Leftrightarrow 0=\langle Y,Y\rangle=\langle x-r(x),x-r(x)\rangle+\langle X(r(x)),X(r(x))\rangle\Leftrightarrow$ $x=r(x)$ 和 $X(r(x))=0$，这就证明了 Y 的零点和 X 的零点完全相同．

在零点 $p\in M$ 处．对于任何 $v\in T_pM$，取 C^∞ 曲线 $x(t)\in M$，$x'(0)=v$，则 $Y(x(t))=x(t)-r(x(t))+X(r(x(t)))=X(x(t))$，$\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\partial Y}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\partial X}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$，$Y_{*p}(v)=X_{*p}(v)$；而对于任何 $v\in T_pM^\perp=\{u\in T_p\mathbf{R}^k\,|\,u\perp T_pM\}$ (p 点处关于 M 的法空间)，有 $Y(p+tv)=(p+tv)-r(p+tv)+X(r(p+tv))=tv+X(p)$，$Y_{*p}(v)=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\partial Y}{\partial x^i}(p)v^i=v$．于是，$\det J_{Y_{*p}}=\det J_{X_{*p}}$，再由引理 5和6，$\mathrm{Ind}Y_p=\mathrm{Ind}_pX$．最后，根据引理 4 得到

$$\sum_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_xX=\sum_{Y(x)=0}\mathrm{Ind}_xY=\deg N.\ \#$$

既然引理 7 告诉我们指数和不依赖于 M 上的只具有非退化零点的 C^∞ 向量场的选取，而定理 1(Poincaré-Hopf 定理)又要求这指数和为 $\chi(M)$．为此，我们寻找一个特殊的 C^∞ 函数 $f=L_p:M\to\mathbf{R}$，$f(x)=L_p(x)=\|x-p\|^2$，$p\in\mathbf{R}^k$ 为固定点，使得 f 的梯度场 $X=\mathrm{grad}f$ 具有上述性质．

定义 3　设 $M\subset\mathbf{R}^k$ 为 n 维 C^∞ 正则子流形，

$$TM^\perp=\{(x,v)\in M\times\mathbf{R}^k\,|\,v\perp T_xM\}\subset\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k=\mathbf{R}^{2k}.$$

从下面应用局部坐标系的表示可看出，$TM^\perp$ 为 M 上的秩为 $k-n$

的 C^∞ 向量丛的丛空间，M 为底空间，$\mathbf{R}^{k-n}$ 为纤维空间，$\pi: TM^\perp \to M$，$\pi(x,v)=x$ 为投影，$\pi^{-1}(x)=T_xM^\perp=\{(x, v)\in\{x\}\times\mathbf{R}^k \mid v\perp T_xM\}\cong\mathbf{R}^{k-n}$ 为 x 处的纤维（x 处的法空间，它是 T_xM 的正交补），称此向量丛为 M 的**法（向量）丛**．它是 $n+(k-n)=k$ 维 C^∞ 流形．

设 (U, φ)，$\{u^1, \cdots, u^n\}$ 为 M 的任一局部坐标系，$x(u)=\varphi^{-1}(u)\in U\subset M$，$(P,Q)=(P(u),Q(u))=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u^1}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial x}{\partial u^n}\end{pmatrix}$ 的行向量 $\left\{\dfrac{\partial x}{\partial u^1}, \cdots, \dfrac{\partial x}{\partial u^n}\right\}$ 形成 $T_{x(u)}M$ 的基，而 $(-(P^{-1}Q)', I_{k-n})$ 的行向量恰为 $T_{x(u)}M^\perp$ 的基，为方便不妨设矩阵 $P(u)$ 非异．定义 $\psi: U\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^k$，$\psi(x,(v^1,\cdots,v^k))=\left(\varphi(x),(v^1,\cdots, v^k)\begin{pmatrix}-(P^{-1}Q)' & I_{k-n}\\ P & Q\end{pmatrix}^{-1}\right)=(u,(y^1,\cdots,y^k))$．显然，$(U\times\mathbf{R}^k,\psi)$ 为 $M\times\mathbf{R}^k$ 的局部坐标系，且 $(x(u),v)\in T_{x(u)}M^\perp\Leftrightarrow v$ 为 $(-(P^{-1}Q)', I_{k-n})$ 的行向量的线性组合 $\Longleftrightarrow v=(y^1,\cdots,y^{k-n},0,\cdots, 0)\begin{pmatrix}-(P^{-1}Q)' & I_{k-n}\\ P & Q\end{pmatrix}$ $\Longleftrightarrow (x, v)$ 对应的局部坐标 $(u,(y^1,\cdots,y^k))$ 中，$y^{k-n+1}=\cdots=y^k=0$．因此，$TM^\perp$ 为 $M\times\mathbf{R}^k$ 的 C^∞ 子向量丛．

定义 4 设 $E: TM^\perp\to\mathbf{R}^k$，$E(x,v)=x+v$，显然，"端点"映射 E 关于 x,v 是 C^∞ 类的（图 27）．

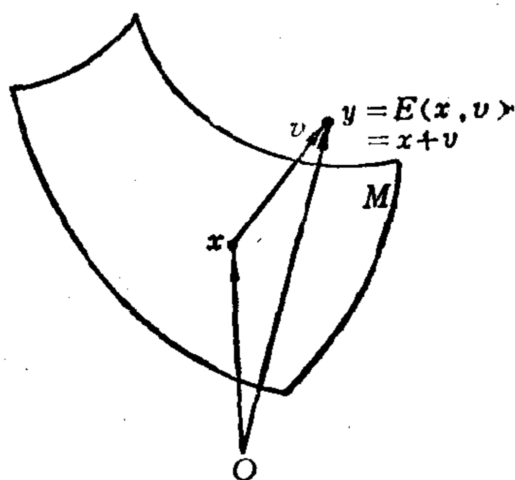


图 27

如果 $(q,v)\in TM^\perp$，$y=q+v$，且 E 在 (q,v) 处的 Jacobi 矩阵的

秩为 $r<k$，则称 $y=q+v\in\mathbf{R}^k$ 为 (M,q) 的重数为 $\mu=k-r>0$ 的焦点. 如果存在 $q\in M$ 使 $y=q+v$ 为 (M,q) 的焦点，则称 y 为 M 的焦点.

引理 8 n 维 C^∞ 正则子流形 $M\subset\mathbf{R}^k$ 的焦点的集合 F 为 $\mathbf{R}^k$ 中的零测集，即 $\mathrm{meas}F=0$. 换句话说，对几乎所有的 $q\in\mathbf{R}^k$，点 q 不是 M 的焦点.

证明 因为 q 为 M 的焦点 $\Longleftrightarrow$ q 为 $E: TM^\perp\to\mathbf{R}^k$ 的临界值. 根据 §1 Sard 定理，

$$\mathrm{meas}F=\mathrm{meas}E(C_E)=0. \quad \#$$

为了更好地理解焦点的概念，引进 n 维 C^∞ 正则子流形 $M\subset\mathbf{R}^k$ 关于局部坐标系 $\{u^1,\cdots,u^n\}$ 的第 I、第 II 基本形式是方便的.

设 $x=x(u^1,\cdots,u^n)=(x^1(u),\cdots,x^k(u))\in M$. 第 I 基本形式 $(g_{ij})=\left(\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle\right)$ 为 $n\times n$ 的正定实矩阵. 第 II 基本形式 (l_{ij}) 为 $n\times n$ 对称向量值矩阵，其中 l_{ij} 是向量 $\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\partial u^j}$ 关于 $T_{x(u)}M\oplus T_{x(u)}M^\perp=T_{x(u)}\mathbf{R}^k$ 的法分量，即 $l_{ij}=\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\partial u^j}\right)^\perp$. 设 $v\in T_{x(u)}M^\perp$，则称 $\left(\left\langle v,\frac{\partial^2 x}{\partial v^i\partial u^j}\right\rangle\right)=(\langle v,l_{ij}\rangle)$ 为 M 在点 $x(u)$ 沿法方向 v 的第 II 基本形式.

关于 λ 的 n 次方程 $\det(\lambda I-(g_{kl})^{-1}(\langle v,l_{ij}\rangle))=0$ 或 $\det(\lambda g_{ij}-\langle v,l_{ij}\rangle)=0$ 的根 $K_1,\cdots,K_n$（即矩阵 $(g_{kl})^{-1}(\langle v,l_{ij}\rangle)$ 的特征值）称为 M 在点 $x(u)$ 沿法方向 v 的主曲率. 如果 $(g_{kl})^{-1}(\langle v,l_{ij}\rangle)$ 非异，从而 $(\langle v,l_{ij}\rangle)$ 也非异，则 $K_i\neq0$, $i=1,\cdots,n$，并称 $K_1^{-1},\cdots,K_n^{-1}$ 为主曲率半径.

引理 9 设 $(q,v)\in TM^\perp$，则 $q+tv$ 为 (M,q) 的重数 $\mu>0$ 的焦点 $\Longleftrightarrow$ 矩阵 $(g_{ij}-t\langle v,l_{ij}\rangle)$ 奇异且其秩为 $k-\mu$.

证明 由定义 3 和Schmidt 正交化过程可选取 $k-n$ 个关于 u 的 C^∞ 向量场 $W_\alpha(u^1,\cdots,u^n)\doteq W_\alpha(u)$, $\alpha=1,\cdots,k-n$, 使得 $W_1,\cdots,W_{k-n}$ 为 $T_{x(u)}M^\perp$ 中的规范正交基（彼此正交的单位向量）. 在法丛 $TM^\perp$ 上引进局部坐标系 $\{u^1,\cdots,u^n,t^1,\cdots,t^{k-n}\}$ 如下：$(u^1,\cdots,u^n,t^1,\cdots,t^{k-n})$ 对应于点 $(x(u^1,\cdots,u^n),\ \sum\limits_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha W_\alpha(u^1,\cdots,u^n))\in TM^\perp$. 则映射 E: $TM^\perp\longrightarrow \mathbf{R}^k$ 由 $(u^1,\cdots,u^n,t^1,\cdots,t^{k-n})\mapsto y=x(u^1,\cdots,u^n)+\sum\limits_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha W_\alpha(u^1,\cdots,u^n)$ 给出. 相应的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y}{\partial u^n} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y}{\partial t^{k-n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^1}+\sum\limits_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha\dfrac{\partial W_\alpha}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x}{\partial u^n}+\sum\limits_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha\dfrac{\partial W_\alpha}{\partial u^n} \\ W_1 \\ \vdots \\ W_{k-n} \end{pmatrix}.$$

将此矩阵的行向量与线性无关向量 $\dfrac{\partial x}{\partial u^1},\cdots,\dfrac{\partial x}{\partial u^n},W_1,\cdots,W_{k-n}$ 作内积得到 $k\times k$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \left\langle\dfrac{\partial x}{\partial u^i},\dfrac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle+\left\langle\sum\limits_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha\dfrac{\partial W_\alpha}{\partial u^i},\dfrac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle & \left\langle\sum\limits_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha\dfrac{\partial W_\alpha}{\partial u^i},W_\beta\right\rangle \\ 0 & I_{k-n} \end{pmatrix},$$

显然，它的秩与 E 的 Jacobi 矩阵的秩在点 $x(u)$ 处是相同的，也就是 $n\times n$ 矩阵

$$\left(\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle+\left\langle\sum_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha\frac{\partial W_\alpha}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle\right)$$

$$=\left(\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle-\left\langle\sum_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha W_\alpha,\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\partial u^j}\right\rangle\right)$$

$$=\left(\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle-\left\langle\sum_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha W_\alpha, l_{ij}\right\rangle\right)$$

$$=(g_{ij}-t\langle v,l_{ij}\rangle)$$

的秩加上$k-n$，其中 $tv=\sum\limits_{\alpha=1}^{k-n}t^\alpha W_\alpha$，并应用了恒等式

$$0=\frac{\partial}{\partial u^i}\left\langle W_\alpha,\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial W_\alpha}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle+\left\langle W_\alpha,\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\partial u^j}\right\rangle.$$

由此可知，$q+tv$ 为 (M,q) 的重数 $\mu>0$ 的焦点$\Longleftrightarrow$矩阵 $(g_{ij}-t\langle v,l_{ij}\rangle)$奇异且其秩为 $k-\mu$. #

引理 10 设 v 为 q 处的单位法向量. 则 (M,q) 沿点 q 处的法线$l=\{q+tv\mid t\in\boldsymbol{R}\}$的焦点确切地为$q+K_i^{-1}v$, $K_i\neq0, 1\leqslant i\leqslant n$. 因此，沿 l 至多只有(M,q)的 n 个焦点(按重数计).

证明 因为(g_{ij})正定，故当$(g_{ij}-t\langle v,l_{ij}\rangle)$奇异时，$t\neq0$ 且$\frac{1}{t}$为 $\det(\lambda g_{ij}-\langle v, l_{ij}\rangle)=0$ 的根，即$\frac{1}{t}=K_i$，$t=K_i^{-1}$ 为矩阵$(g_{kl})^{-1}(\langle v,l_{ij}\rangle)$的特征值. 更进一步，焦点 $q+K_i^{-1}v$ 的重数 μ 恰为 K_i^{-1} 作为特征值的重数. #

定义 5 设 M 为 n 维 C^∞流形，$f: M\longrightarrow\boldsymbol{R}$ 为 C^∞ 函数，$p\in M$ 为 f 的临界点，即$(\mathrm{rank}f)_p<\dim\boldsymbol{R}=1$. 因此，$(\mathrm{rank}f)_p=0$，且在 p 的任一局部坐标系$\{x^i\}$中，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}(p)\right)=(0,\cdots,0).$$

在 f 的临界点 $p\in M$ 处，如果矩阵$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)\right)$是非异的，则

称 p 为 f 的**非退化的临界点**．设 $\{y^i\}$ 为 p 的另一局部坐标系，则由 $\frac{\partial f}{\partial x^l}(p)=0$ 得到

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}(p)\right)=\left(\sum_{l,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k}(p)\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\frac{\partial x^l}{\partial y^i}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^l}(p)\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial x^l}{\partial y^i}\right)'\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k}(p)\right)\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\right),$$

从而 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}(p)\right)$ 非异 $\Longleftrightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$ 非异，且 p 为 f 的非退化临界点的定义与局部坐标系的选取无关．

定义 6 设 M 为 n 维 C^∞ 流形，p 为 C^∞ 函数 $f: M\to \mathbf{R}$ 的临界点，我们定义 f 在 p 点的 **Hessian** 为 T_pM 上的对称双线性函数 $f_{**}: T_pM\times T_pM\longrightarrow \boldsymbol{R}$ 如下：如果 $v, w\in T_pM$，则将它们延拓为 M 上的 C^∞ 切向量场 $\tilde{v}, \tilde{w}$．令 $f_{**}(v,w)=\tilde{v}_p(\tilde{w}f)$，这里 $\tilde{v}_p=v$．因为

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}f)-\tilde{w}_p(\tilde{v}f)=[\tilde{v},\tilde{w}]_p f=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=$$

0，故 $f_{**}(v,w)=\tilde{v}_p(\tilde{w}f)=\tilde{w}_p(vf)=f_{**}(w,v)$，即 f_{**} 是对称的．又因为 $\tilde{v}_p(\tilde{w}f)=v(\tilde{w}f)$ 与 v 的延拓 $\tilde{v}$ 无关，而 $\tilde{w}_p(\tilde{v}f)=w(\tilde{v}f)$ 与 w 的延拓 $\tilde{w}$ 无关，故 f_{**} 是定义确切的．

设 $\{x^i\}$ 为 p 的局部坐标系，$v=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$，$w=\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p$，

$\tilde{w}=\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial x^j}$（严格地，应用第一章 § 3 的引理，将 $\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ 延拓到 M 上）．则

$$f_{**}(v,w)=v(\tilde{w}f)=v\left(\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a^ib^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p),$$

因此. 矩阵$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$为双线性函数 f_{**} 在基$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right\}$下的表示.

我们称 $\mathrm{Ind} f_{**}=\mathrm{Ind}_p f=\max\{\dim V \mid V\subset T_pM$ 为线性子空间, f_{**} 在 V 上负定$\}$为 f_{**}(或 f 在 p) 的**指数**. 称 f_{**} 的**零空间** $\{v\in T_pM \mid$ 对任何 $w\in T_pM, f_{**}(v,w)=0\}$的维数

$$\mathrm{Nul} f_{**}=\dim\{v\in T_pM \mid \text{对任何 } w\in T_pM, f_{**}(v,w)=0\}$$

为 f_{**} 的**零性数**.

引理 11 f 的临界点 p 是非退化的$\Leftrightarrow \mathrm{Nul} f_{**}=0$.

证明 ($\Rightarrow$)设 $v=\sum\limits_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$, 如果对任何 $w=\sum\limits_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p$,

有
$$0=f_{**}(v,w)=\sum_{i,j=1}^n a^i b^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)$$

$$=(a^1,\cdots,a^n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots \\ b^n\end{pmatrix}, \text{因}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$$

非异, 故可取$(b^1,\cdots,b^n)=(a^1,\cdots,a^n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$, 则必须$(a^1,\cdots,a^n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)=0$, 于是, $(a^1,\cdots,a^n)=(0,\cdots,0)$, $v=0$, 即 $\mathrm{Nul} f_{**}=0$.

($\Leftarrow$) (反证)假设$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$奇异, 则存在 $(a^1,\cdots,a^n)\neq(0,\cdots,0)$, 使得$(a^1,\cdots,a^n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)=(0,\cdots,0)$, 于是对任何 $(b^1,\cdots,b^n)$ 有 $f_{**}(v,w)=(a^1,\cdots,a^n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)\begin{pmatrix}b^1\\ \vdots \\ b^n\end{pmatrix}=0$, 即 $\mathrm{Nul} f_{**}\neq 0$, 这与已知 $\mathrm{Nul} f_{**}=0$ 相矛盾. #

Morse 指出，f 在 p 点的性质完全由 f 在 p 点的指数所描述.

引理 12 (Morse) 设 M 为 n 维C^∞流形，$p\in M$为C^∞函数 f: $M\to\mathbf{R}$ 的非退化临界点. 则存在 p 的局部坐标系 (U,φ)，$\{y^i\}$使得 $y^i(p)=0, i=1,\cdots,n$ 和

$$f=f(p)-(y^1)^2-\cdots-(y^\lambda)^2+(y^{\lambda+1})^2+\cdots+(y^n)^2,$$

其中 $\lambda=\mathrm{Ind}_p f$. 由此公式明显看出 p 为 f 的孤立临界点.

证明 首先证明，如果 f 存在这样的表示，则 $\lambda=\mathrm{Ind}_p f$. 因为

$$f(q)=f(p)-(y^1(q))^2-\cdots-(y^\lambda(q))^2+(y^{\lambda+1}(q))^2+\cdots \\ +(y^n(q))^2,$$

故 f_{**} 关于基$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p\right\}$的矩阵表示为

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^i\partial y^j}(p)\right)=\begin{pmatrix} \overbrace{-2 \quad\quad}^{\lambda\text{个}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \underbrace{2}_{n-\lambda\text{个}} \end{pmatrix}.$$

因此，存在 T_pM 的一个 λ 维线性子空间，f_{**} 在其上是负定的. 同时也存在一个 T_pM 的 $n-\lambda$ 维线性子空间 V_1，f_{**} 在其上是正定的. 如果存在 T_pM 的线性子空间 V_2，$\dim V_2>\lambda$，且 f_{**} 在其上是负定的，则 f_{**} 在 $V_1\cap V_2\neq\{0\}$ 上既是正定又是负定，矛盾. 这就证明了 $\lambda=\mathrm{Ind} f_{**}=\mathrm{Ind}_p f$.

现在证明引理中的局部坐标系$\{y^i\}$是存在的. 显然，可以假定 $p=0, f(p)=f(0)=0$. 由第二章 § 3 定理 1 的证明可知，在 p 的某个局部坐标系$\{x^i\}$中，$f(x^1,\cdots,x^n)=\sum\limits_{j=1}^n x^j f_j(x^1,\cdots,x^n)$,

$f_j(x^1,\cdots,x^n)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^j}(tx^1,\ \cdots,\ tx^n)dt$，$f_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x^j}(0)$，其中 $(x^1,\ \cdots,\ x^n)$ 在 0 的某个凸开邻域里变动. 因为 0 是 f 的临界点，$f_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x^j}(0)=0$. 所以再一次应用第二章 § 3 定理 1 的证明中的公式到 f_j，得到

$$f_j(x^1,\cdots,x^n)=\sum_{i=1}^{n}x^i h_{ij}(x^1,\cdots,x^n),$$

其中 h_{ij} 为 C^∞ 函数，$h_{ij}(x^1,\ \cdots,\ x^n)=\int_0^1\frac{\partial f_j}{\partial x^i}(tx^1,\cdots,tx^n)dt$

$$=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^j}(ux^1,\cdots,ux^n)du\right)\Big|_{tx}dt$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(ux^1,\cdots,ux^n)udu\right)\Big|_{tx}dt,$$

易见 $h_{ij}=h_{ji}$ 且 $h_{ij}(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(0)\int_0^1\left(\int_0^1 udu\right)dt=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(0)$.

于是，$f(x^1,\cdots,x^n)=\sum_{i,j=1}^{n}x^ix^jh_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$. 这式子提示我们应用线性代数中二次形式化为对角形的归纳法得到本引理的结果.

假设存在 0 的开邻域 U_1 中的坐标 $\{u^i\}$，使得

$$f=\pm(u^1)^2\pm\cdots\pm(u^{r-1})^2+\sum_{i,j\geqslant r}u^iu^jH_{ij}(u^1,\cdots,u^n),$$

其中 $H_{ij}=H_{ji}$. 显然，$r=1$ 时就是上述已证的结论. 由定义 5，$H_{ij}(0),i,j\geqslant r$ 不全为 0，故可作一个后 $n-r+1$ 坐标的线性变换，不妨设 $H_{rr}(0)\neq 0$. 于是，$\sqrt{|H_{rr}(u)|}$ 在 0 的更小的开邻域 $U_2\subset U_1$ 中为非零的 C^∞ 函数，现在，引进新的坐标 $\{v^i\}$，

$$\begin{cases}v^i=u^i,\ i\neq r,\\ v^r(u^1,\ \cdots,\ u^n)=\sqrt{|H_{rr}(u^1,\cdots,u^n)|}\end{cases}$$

$$\cdot\left(u^r + \sum_{i \geq r+1} u^i \frac{H_{ir}(u^1, \cdots, u^n)}{|H_{rr}(u^1, \cdots, u^n)|}\right).$$

根据反函数定理，$\{v^i\}$在 0 的充分小的开邻域 $U_3 \subset U_2$ 中为坐标，且

$$f = \sum_{i \leq r} \pm (v^i)^2 + \sum_{i,j \geq r+1} v^i v^j \widetilde{H}_{ij}(v^1, \cdots, v^n),$$

这就完成了归纳证明. #

定义 7 设 M 为 n 维 C^∞ 流形，g 为 M 上的 2 阶协变张量场，即对任何 $p \in M$，$g_p = \langle\ ,\ \rangle_p$: $T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbf{R}$ 为双(偏)线性函数，且满足：

(1) $g_p(X,Y) \geq 0$; $g_p(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (正定性);

(2) $g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$ (对称性);

(3) g 为 C^∞ 张量场 (C^∞ 性),

其中 $X, Y \in T_pM$ 为任意切向量，则称 $g = \langle\ ,\ \rangle$ 为 M 上的一个 **Riemann 度量**或**内积**，称(M, g)为 n 维 C^∞**Riemann 流形**.

设$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$为 $p \in M$ 的局部坐标系，$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 为 g 关于$\{x^i\}$的分量. 由定义，显然(g_{ij})以及它的逆矩阵(g^{ij})都为正定矩阵. 如果 $X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y = \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial y^j}$，则

$$g(X,Y) = g\left(\sum_{i=1}^n a^i X_i, \sum_{j=1}^n b^j X_j\right) = \sum_{i,j=1}^n a^i b^j g_{ij}.$$

如果(U_β, φ_β)，$\{y^i\}$为 $p \in M$ 的另一局部坐标系，

$$\tilde{g}_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right), \text{ 则}$$

$$\tilde{g}_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = g\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^k}, \sum_{l=1}^n \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} \cdots \tilde{g}_{1n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \tilde{g}_{n1} \cdots \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \cdots g_{1n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ g_{n1} \cdots g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}.$$

两边取逆矩阵得到

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}^{11} \cdots \tilde{g}^{1n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \tilde{g}^{n1} \cdots \tilde{g}^{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} \cdots g^{1n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ g^{n1} \cdots g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \cdots \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

$\tilde{g}^{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} g^{kl}$. 读者可给出 $C^r(r \geqslant 1)$Riemann 流形不变和坐标观点的定义

例 3 设 M_1 为 n_1 维 C^∞ 流形，(M_2, g)为 n_2 维 C^∞Riemann 流形，$f: M_1 \to M_2$ 为 C^∞ 浸入．由第三章 § 1 定理知，f^*g 为 M_1 上的 2 阶 C^∞ 协变张量场．又因为

$f^*g(X, X) = g(f_*X, f_*X) \geqslant 0;$

$f^*g(X, X) = g(f_*X, f_*X) = 0 \Leftrightarrow f_*X = 0 \Leftrightarrow X = 0$($f$ 为浸入);

$f^*g(X, Y) = g(f_*X, f_*Y) = g(f_*Y, f_*X) = f^*g(Y, X),$

故 f^*g 为 M_1 上的 C^∞Riemann 度量．

特别当 $M_1 \subset M_2$，f 为包含映射且为嵌入，就将 $f^*g(X, Y) = g(f_*X, f_*Y)$简单记作 $g(X, Y)$．实际上，前面对于 Euclid 空间中的正则子流形的内积$\langle , \rangle$就是这样处理的．

定义 8 设$(M, \langle , \rangle)$为 n 维C^∞Riemann 流形，我们定义C^∞函数 f 在M 上的**梯度场** grad$f$：对任何 M 上的 C^∞ 切向量场 X,

$$\langle X, \mathrm{grad} f\rangle = Xf \quad (f \text{ 沿 } X \text{ 方向的方向导数}).$$

显然，这定义不涉及局部坐标系，是完全确定的. 在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中,设 $\mathrm{grad} f = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $\sum_{i=1}^n a^i g_{ji} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial x^j} f = \frac{\partial f}{\partial x^j}$, 即 $a^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$. 由此推出 a^i 为 $x^1, \cdots, x^n$ 的 C^∞ 函数, 故 $\mathrm{grad} f$ 为 M 上的 C^∞ 切向量场.

也可采用古典的坐标观点,通过直接验证

$$\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \tilde{g}^{lk} \frac{\partial f}{\partial y^k}\right)\frac{\partial}{\partial y^l} = \sum_{l,k,s,t,i,j=1}^n \frac{\partial y^l}{\partial x^s}\frac{\partial y^k}{\partial x^t} g^{st} \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= \sum_{s,t,i,j=1}^n \delta_s^i \delta_t^j g^{st} \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

给出 f 的梯度场 $\mathrm{grad} f$ 的定义.

设 $\sigma: M\to \mathbf{R}$ 为 C^∞ 曲线, $\sigma'(t) = \frac{d\sigma}{dt}$ 为沿 σ 的切向量场, 则

$$\left\langle \sigma', \mathrm{grad} f\right\rangle = \sigma' f = \frac{d(f\circ\sigma)}{dt}.$$

引理 13 设 $(M, \langle,\rangle)$ 为 n 维 C^∞Riemann 流形, $f: M\to \mathbf{R}$ 为 C^∞ 函数. 则

(1) p 为 f 的临界点 $\Leftrightarrow p$ 为 $\mathrm{grad} f$ 的零点;

(2) p 为 f 的非退化临界点 $\Leftrightarrow p$ 为 $\mathrm{grad} f$ 的非退化零点.

证明 在 p 的局部坐标系 $\{x^i\}$ 中,

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right).$$

(1) p 为 f 的临界点, 即 $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0, i = 1, \cdots, n \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n g^{ij}(p)\cdot$

$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)=0, i=1,\cdots,n$, 即 p 为 grad f 的零点.

(2) 由(1)和

$$\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^i}(p)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^n g^{kj}(p)\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\right)\right)=\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^i}(p)\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^n g^{kj}(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)\right)=(g^{kj}(p))\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)\right),$$

我们看到,p 为 grad$f$ 的非退化零点, 即$\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^i}(p)\right)$为非异矩阵$\Leftrightarrow$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)\right)$为非异矩阵,即 p 为 f 的非退化临界点. #

引理 14 设M为 n 维 C^∞ 流形,$p\in M$ 为 C^∞ 函数 $f:M\to\boldsymbol{R}$ 的非退化临界点. 则

$$\mathrm{Ind}_p(\mathrm{grad}f)=(-1)^{\mathrm{Ind}_pf}.$$

证明 因为 p 为 C^∞ 函数 $f:M\to\boldsymbol{R}$ 的非退化临界点,由引理 12, 存在 p 的局部坐标系$(V,\varphi),\{y^i\}$, 使得 $y^i(p)=0, i=1,\cdots,n$ 和

$$f=f(p)-(y^1)^2-\cdots-(y^\lambda)^2+(y^{\lambda+1})^2+\cdots+(y^n)^2,$$

其中 $\lambda=\mathrm{Ind}_pf$. 于是, $\mathrm{grad}f=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^i}$, 其坐标形式为

$$\begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ g^{n1} & \cdots & g^{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial y^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}.$$

设 $\sigma:[0,1]\to GL(n,\boldsymbol{R})$为 C^∞ 映射,$\sigma(0)=(g^{ij}), \sigma(1)=I_n$, 则由 C^∞ 同伦

$\sigma(t)\left(\frac{\partial f}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial y^n}\right)' \Big/ \left\|\sigma(t)\left(\frac{\partial f}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial y^n}\right)'\right\|$为连接$(g^{ij})\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial y^n}\right)' \Big/ \|(-y^1,\cdots,-y^\lambda,y^{\lambda+1},\cdots,y^n)\|$的$C^\infty$同伦，而后者由 §2 例 4 可知

$$\mathrm{Ind}_p(\mathrm{grad} f)=(-1)^\lambda=(-1)^{\mathrm{Ind}_p f}. \qquad \#$$

引理 15 设M为n维C^∞紧致流形，$f:M\to \boldsymbol{R}$为只含非退化临界点的C^∞函数(称为C^∞Morse 函数)，则

$$\chi(M)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_i(M;f)=\sum_{(\mathrm{grad} f)|_x=0}\mathrm{Ind}_x(\mathrm{grad} f),$$

其中$C_i(M;f)$为f的指数为i的临界点的数目.

证明 设$Z\subset Y\subset X$，我们有同调群和同态的正合序列(参阅[Munkres, J. R., p141, p148, p224][2])：

$$\cdots\to H_{k+1}(X,Y;\boldsymbol{R})\xrightarrow{\partial_{k+1}}H_k(Y,Z;\boldsymbol{R})\xrightarrow{i_k}H_k(X,Z;\boldsymbol{R})$$
$$\xrightarrow{j_*}H_k(X,Y;\boldsymbol{R})\to\cdots.$$

由抽象代数知识得到

$$b_k(X,Z)=\dim H_k(X,Z;\boldsymbol{R})=\dim\mathrm{Im}(i_k)+\dim\mathrm{Im}(j_k),$$
$$b_k(X,Y)=\dim H_k(X,Y;\boldsymbol{R})=\dim\mathrm{Im}(j_k)+\dim\mathrm{Im}(\partial_k),$$
$$b_k(Y,Z)=\dim H_k(Y,Z;\boldsymbol{R})=\dim\mathrm{Im}(i_k)+\dim\mathrm{Im}(\partial_{k+1})$$

于是，

$$b_k(X,Z)-b_k(X,Y)-b_k(Y,Z)=\dim\mathrm{Im}(i_k)+\dim\mathrm{Im}(j_k)$$
$$-\dim\mathrm{Im}(j_k)-\dim\mathrm{Im}(\partial_k)-\dim\mathrm{Im}(i_k)-\dim\mathrm{Im}(\partial_{k+1})$$
$$=-\dim\mathrm{Im}(\partial_k)-\dim\mathrm{Im}(\partial_{k+1}),$$

和关于 Euler 示性数χ有

$$\chi(X,Z)-\chi(X,Y)-\chi(Y,Z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[b_k(X,Z)-$$
$$b_k(X,Y)-b_k(Y,Z)]=-\dim\mathrm{Im}(\partial_0)+(-1)^{n+1}\dim\mathrm{Im}(\partial_{n+1})=0,$$

即 $\chi(X,Z)=\chi(X,Y)+\chi(Y,Z)$. 如果 $X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_n$, 则由归纳法得到

$$\chi(X_m,X_0)=\sum_{k=1}^{m}\chi(X_k,X_{k-1}).$$

设 $b_1<b_2<\cdots<b_m$ 为 f 的全部临界值(因 M 紧致, 故 f 的临界点和临界值是有限的). 根据 [Kahn, D. W., Lemma 8. 2], 有

$C_i(M;f)=\sum_{k=1}^{m}\dim H_i(M_{b_k},\ M_{b_k^-};\boldsymbol{R})$, 其中 $M_b=\{x\in M\mid f(x)\leqslant b\}$ 和 $M_{b^-}=\{x\in M\mid f(x)<b\}$. 选 a_k 使 $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_m<b_m<a_{m+1}$ 再根据[Kahn, D. W., Lemma 8. 4]有

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_i(M;f)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{k=1}^{m}\dim H_i(M_{b_k},M_{b_k^-};\boldsymbol{R})$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{k=1}^{m}\dim H_i(M_{a_{k+1}},M_{a_k};\ \boldsymbol{R})=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dim H_i$$

$$(M_{a_{k+1}},M_{a_k};\boldsymbol{R})=\sum_{k=1}^{m}\chi(M_{a_{k+1}},M_{a_k};\boldsymbol{R})=\chi(M_{a_{m+1}},M_{a_1};\boldsymbol{R})$$

$$=\chi(M,\varnothing;\boldsymbol{R})=\chi(M).$$

再由引理 14, $\sum_{(\mathrm{grad} f)|_x=0}\mathrm{Ind}_x(\mathrm{grad} f)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_i(M;f)=\chi(M)$. 此引理也可参阅[Milnor, J. W., p29, Theorem 5. 2][2].

#

引理 16 设 $M\subset\boldsymbol{R}^k$ 为 n 维 C^∞ 正则子流形, $p\in\boldsymbol{R}^k$, $f=L_p:M\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=L_p(x)=\|x-p\|^2$, 则

(1) f 有临界点 $q\Leftrightarrow q-p\perp T_pM$;

(2) $q\in M$ 为 $f=L_p$ 的退化临界点 $\Leftrightarrow p$ 为 (M,q) 的焦点. 此外, q 作为 $f=L_p$ 的退化临界点的零性数等于 p 作为 (M,q) 的

焦点的重数.

证明 (1)设$\{u^i \mid i=1,\cdots,n\}$为$q$关于$M$的局部坐标系,则

$$f(x(u^1,\cdots,u^n)) = \|x(u^1,\cdots,u^n)-p\|^2$$
$$=\langle x,x\rangle - 2\langle x,p\rangle + \langle p,p\rangle,$$
$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, x-p\right\rangle,$$

因此,f有临界点$q \Leftrightarrow q-p \perp T_qM$.

(2) 因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2\left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, x-p\right\rangle\right).$$

令$x=q, p=q+tv$代入上式并由引理9得到:

$q\in M$为$f=L_p$的退化临界点$\Leftrightarrow\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}\right)=2(g_{ij}-t\langle v, l_{ij}\rangle)$为奇异矩阵$\Leftrightarrow p$为$(M,q)$的焦点. 因此,$q$作为$f=L_p$的临界点的零性数恰好等于$p$作为$(M,q)$的焦点的重数. #

引理 17 设$M\subset \boldsymbol{R}^k$为$n$维$C^\infty$正则子流形. 则对几乎所有的$p\in \boldsymbol{R}^k$(除一个零测集外的集合),函数$L_p: M\to \boldsymbol{R}$无退化的临界点,即它若有临界点必是非退化的. 更进一步,如果M紧致,则它的非退化临界点为有限集.

证明 由引理8和引理16(2)立即推出. #

Poincaré-Hopf 定理的证明 根据第一章§3的嵌入定理,不妨设n维C^∞紧致流形$M\subset \boldsymbol{R}^k$为$C^\infty$正则子流形. 由引理15和引理17,存在$M$上只含非退化临界点$p_1,\cdots,p_k$的$C^\infty$函数$f: M\to \boldsymbol{R}$,且

$$\sum_{(\mathrm{grad} f)|_x=0} \mathrm{Ind}_x(\mathrm{grad}\, f) = \chi(M).$$

由引理7,如果X为M上只含非退化零点的任意C^∞切向量场,则

$$\sum_{X(x)=0} \operatorname{Ind}_x X = \deg N = \sum_{(\operatorname{grad} f)|_x=0} \operatorname{Ind}_x(\operatorname{grad} f) = \chi(M).$$

更一般地，如果 X 为 M 上只含孤立零点的 C^∞ 切向量场．由 M的紧致性，孤立零点只有有限个，记为 $p_1, \cdots p_k$.

选 p_1的局部坐标系$(U, \varphi), \{x^i\}$，使得 $\varphi(p_1)=0, O(0,1)\subset \varphi(U)$ ($O(0,r)$ 为 R^n 中以 0 为中心 r 为半径的开球)和U 中只含X的孤立零点 p_1.

应用第一章 §3 引理 1 中的 h，令 $s: R^n \to R$ 为 $s(x)=h(\|x\|^2)$．显然，s是C^∞ 的且 $s|_{O(0,\frac{1}{2})}=1, s|_{R^n-O(0,1)}=0$．于是 $\mu: M\to R$,

$$\mu(x)=\begin{cases} s(\varphi(x)), & x\in U, \\ 0, & x\in M-U \end{cases}$$

为 C^∞ 函数且 $\mu|_{U_1}=1$，$\mu|_{M-\bar{U}_2}=0$，其中 $U_1=\varphi^{-1}\left(O\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$, $U_2=\varphi^{-1}(O(0,1))$．令

$$Y(x)=\begin{cases} X(x), x\in M-U \\ X(x)-\mu(x)\varphi_{*x}^{-1}(y), x\in U, \end{cases}$$

其中 $y\in R^n$为一固定向量($\varphi_{*x}^{-1}(y)$中，视 y 为R^n中的常向量场)．显然，在 $M-\bar{U}_2$ 中 $Y(x)=X(x)$，它们有相同的零点．因为$\bar{U}_2-U_1$紧致，故当 y 充分小时，Y 在 $\bar{U}_2-U_1$ 中根本无零点．根据 Sard 定理，还可选择 y 为 $\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1}: \varphi(U)\to R^n$的足够小的正则值．于是在 $\varphi(U_1)$ 中，$\varphi_*\circ Y\circ\varphi^{-1}=\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1}-y\cdot\mu\circ\varphi^{-1}=\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1}-y$ 只含非退化的零点，从而Y在U_1中只含非退化的零点．应用§2 引理3 和由

$$\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1}-ty\circ\mu\circ\varphi^{-1}$$

为连接 $\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1}$ 与$\varphi_*\circ Y\circ\varphi^{-1}=\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1}-y\circ\mu\circ\varphi^{-1}$ 的 C^∞ 同伦得到

$$\mathrm{Ind}_{p_1}X=\mathrm{Ind}_{\varphi(p_1)}\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1}=\deg(\varphi_*\circ X\circ\varphi^{-1})\big|_{\partial O(0,\frac{1}{2})}$$

$$=\deg(\varphi_*\circ Y\circ\varphi^{-1})\big|_{\partial O(0,\frac{1}{2})}=\sum_{i=1}^{k}\deg(\varphi_*\circ Y\circ\varphi^{-1})\big|_{\partial O(\varphi(x_i),\varepsilon)}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Ind}_{\varphi(x_i)}(\varphi_*\circ Y\circ\varphi^{-1})=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Ind}_{x_i}Y=\sum_{Y(x)=0,x\in U_1}\mathrm{Ind}_xY\big|_{U_1},$$

其中 $x_1,\cdots,x_k$ 为 Y 在 U_1 中的所有非退化零点，而 $\overline{O(\varphi(x_i),\varepsilon)}\subset O\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, $i=1,\cdots,k$ 为彼此不相交的小球. 于是,

$$\sum_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_xX=\sum_{Y(x)=0}\mathrm{Ind}_xY.$$

反复应用上述过程得到，只含孤立零点的任意 C^∞ 切向量场 X 能换为一个只含非退化零点的 C^∞ 切向量场 Y, 且

$$\sum_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_xX=\sum_{Y(x)=0}\mathrm{Ind}_xY=\chi(M),$$

这就完成了 Poincaré-Hopf 指数定理的全部证明. #

例 4 在例 2 中具体给出了 S^n 上只有两个孤立零点 p 和 $-p$ 的 C^∞ 切向量场 $X(x)=p-\langle p, x\rangle x$, $x\in S^n$, 由 Poincaré-Hopf 指数定理得到 S^n 的 Euler 示性数 $\chi(M)=\mathrm{Ind}_pX+\mathrm{Ind}_{-p}X=1+(-1)^n$.

因此，再由第四章 § 2 例 5, S^n 上存在处处非 0 的 C^∞ 切向量场 $\Leftrightarrow 0=\sum\limits_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_xX=\chi(S^n)=1+(-1)^n\Leftrightarrow n$ 为奇数.

下面讨论 C^∞ 连通流形 M 上处处非 0 C^∞ 切向量场的存在性问题. 先证几个引理.

引理 18 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 紧致流形，则 M 上有只含一个零点的 C^∞ 切向量场 X.

证明 第一章 § 3 定理 6 指出, M 可视作 $R^{m(n+1)}$ 中的 C^∞ 正

则子流形，$I: M \to R^{m(n+1)}$ 为包含映射. 如果 g 为 $R^{m(n+1)}$ 中的通常 Riemann 度量，则 (M, I^*g) 为 Riemann 子流形.

由引理 17，存在 C^∞ Morse 函数 $f: M \to \boldsymbol{R}$，即它只含非退化临界点(因而是孤立的)，又因为 M 紧致，故它只有有限个非退化临界点，则 $Y = \text{grad}\, f$ 只含有限个非退化零点. 从紧致流形 M 上的 C^∞ 函数 f 必有最大和最小值点推出 $Y = \text{grad}\, f$ 必有非退化零点. 设 Y 的零点为 $p_1, \cdots, p_m$，当 $i \neq j$ 时有 $p_i \neq p_j$. 取定点 $p \in M$ 和 p 的局部坐标系 (U, φ)，使 $\varphi(U) = \boldsymbol{R}^n$，$\varphi(p) = 0$. 根据第三章 § 4 推论 1，存在 C^∞ 同胚 $\psi: M \to M$，使 $\psi(p_i) = q_i$，其中 q_i，$i = 1, \cdots, m$ 为 $V = \varphi^{-1}(O(0, 1))$ 中的 m 个互不相同的点. 则 M 上的 C^∞ 切向量场 $\psi_* Y$ 只含非退化零点 $q_1, \cdots, q_m \in V$ 和 $Z_1 = \varphi_* \circ \psi_* Y$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中只含非退化零点 $\varphi(q_1), \cdots, \varphi(q_m) \in \varphi(V) = O(0, 1)$ 的 C^∞ 切向量场. 令 $f_1: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,

$$f_1(r) = \begin{cases} 0, & r \leqslant 0, \\ e^4 \cdot e^{-\frac{1}{r^2}}, & 0 < r < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 1, \\ r, & r > 1, \end{cases}$$

并构造 $\boldsymbol{R}^n$ 上只含一个零点 0 的连续切向量场

$$Z_2(x) = \begin{cases} 0, & \|x\| = 0, \\ Z_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot f(\|x\|), & 0 < \|x\| < \frac{1}{2}, \\ Z_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1, \\ Z_1(x), & \|x\| > 1. \end{cases}$$

根据[Bröcher, Th. *and* Jänich, K. p150]的

扰动定理 设 $f: M \to N$ 为 C^∞ 流形之间的连续映射，它在闭子集 $A \subset M$ 的一个开邻域 U 上是 C^∞ 的. 则存在任意靠近 f 的 C^∞

映射 $h:M\to N$，使得 $h|_A=f|_A$.

我们有充分靠近Z_2的 C^∞ 向量场 Z，使得 $Z|_A=Z_2|_A$，且在$\mathbf{R}^n-O(0,\ 2)$上有 $Z=Z_2=Z_1=\varphi_*\circ\psi_*Y$，其中 $A=\overline{O\left(0,\frac{1}{4}\right)}\cup(\mathbf{R}^n-O(0,2))$为$\mathbf{R}^n$中闭集. 显然，$Z$ 只含一个零点 0. 于是，

$$X(q)=\begin{cases}\varphi_*^{-1}Z(q),\ q\in U,\\ \psi_*Y(q),\ \ q\overline{\in}U,\end{cases}$$

为M上的只含一个零点的 C^∞ 切向量场. #

注 1 利用[Bröcher, Th. *and* Jänich, K., p146]的

Thom 截面横截性定理 设 $f:E\to M$ 为 C^∞ 流形之间的C^∞映射，$s:M\to E$ 为 f 的 C^∞ 截面(即$f\circ s=\mathrm{Id}_M$，此时 f 为满射，纤维丛的截面为其特殊情形)，$N\subset E$ 为 C^∞ 子流形，则存在任意靠近 s 的 C^∞ 截面 $t:M\to E$ 横截于 N. 如果对于闭子集 $A\subset M$ 的所有点关于 s 的横截条件已满足，则可以选择截面 t 使得 $t|_A=s|_A$.
在[Bott, R. *and* Tu, L. W., *p*123, *Proposition*11.14]或[Guillemin, V. *and* Pollack, A., *p*146, *Exercise* 11]中也证明了M上存在只含有限个零点的 C^∞ 切向量场.

定理 2 C^∞ 紧致流形$(M,\mathscr{D})$ 上存在处处非 0 的 C^∞ 切向量场 $X\Leftrightarrow\chi(M)=0$.

证明 ($\Rightarrow$) 由 Poincaré-Hopf 指数和定理$\{x\in M\,|\,X(x)=0\}=\varnothing$，故 $\chi(M)=\sum\limits_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_xX=0$.

($\Leftarrow$)由引理 18，存在 M 上只含一个零点 p 的 C^∞ 切向量场Y，再由 Poincaré-Hopf 指数定理，$\mathrm{Ind}_pY=\chi(M)=0$.

设(U,φ)为 p 的局部坐标系，$\varphi(p)=0$，$\varphi(U)=\mathbf{R}^n$. $Z=\varphi_*Y$ 为只含零点 $\varphi(p)=0$ 的 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 切向量场，其指数为 0. 考虑 C^∞ 映射 $f:S^{n-1}\to S^{n-1}$，$f(x)=\dfrac{Z(x)}{\|Z(x)\|}$，则 $\deg f=\mathrm{Ind}_0Z$.

根据[Guillemin, V. *and* Pollack, A., *p*146] 或[J. W. 米尔诺, 熊金城译, 56 页]的

Hopf 度数定理 设M为n维紧致、连通可定向的C^∞流形，则

$f, g: M \to S^n$ C^∞ 同伦(记为 $f \simeq g$)$\Leftrightarrow \deg f = \deg g$.

上述 $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ C^∞ 同伦于常值映射$c \in S^{n-1}$，即存在C^∞映射$F: R \times S^{n-1} \to S^{n-1}$，使得

$$F_t(x) = F(t, x) = \begin{cases} c, & t \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ f(x), & t \geqslant \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c, & t \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{Z(x)}{\|Z(x)\|}, & t \geqslant \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

于是可由 F 构造一个连续映射 $G_1: \boldsymbol{R}^n \to S^{n-1}$,

$$G_1(x) = \begin{cases} c, & 0 \leqslant \|x\| < \dfrac{1}{3}, \\ F\left(\|x\|, \dfrac{x}{\|x\|}\right), & \dfrac{1}{3} < \|x\| < 1, \\ \dfrac{Z(x)}{\|Z(x)\|}, & \|x\| \geqslant 1. \end{cases}$$

显然 $G_1|_{S^{n-1}} = f$. 根据扰动定理，存在充分靠近 G_1 的 C^∞ 映射 G，使在闭集 $A = \overline{O\left(0, \frac{1}{4}\right)} \cup (\boldsymbol{R}^n - O(0, 2))$ 上有 $G|_A = G_1|_A$. 再将 $\boldsymbol{R}^n - O(0, 1)$ 上的 C^∞ 函数$\|Z(x)\|$延拓为$\boldsymbol{R}^n$上的恒正连续函数，使得

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{O\left(0, \dfrac{1}{2}\right)}, \\ \|Z(x)\|, & x \in \boldsymbol{R}^n - O(0, 1). \end{cases}$$

再一次根据扰动定理，存在充分靠近 λ_1 的 $\boldsymbol{R}^n$ 上的恒正 C^∞ 函数 λ，使在闭集 $A=\overline{O\left(0,\frac{1}{4}\right)}\cup(\boldsymbol{R}^n-O(0,\ 2))$ 上，$\lambda|_A=\lambda_1|_A$. 于是，$\lambda(x)G(x)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上处处非 0 的 C^∞ 切向量场且在 $\boldsymbol{R}^n-O(0,2)$ 上有

$$\lambda(x)G(x)=\lambda_1(x)G_1(x)=\|Z(x)\|\frac{Z(x)}{\|Z(x)\|}=Z(x)$$

$$=(\varphi_*Y)(x).$$

因此，

$$X(y)=\begin{cases}\varphi_*^{-1}(\lambda\cdot G)(\varphi(y)), & y\in U,\\ Y(y), & y\overline{\in}U\end{cases}$$

为 M 上的处处非 0 的 C^∞ 切向量场. #

推论 2 设 M 为 $2k+1$ 维 C^∞ 紧致流形，$k\in N\cup\{0\}$，则 $\chi(M)=0$.

证明 由引理 17 和 13，存在只含非退化零点的 C^∞ 切向量场 $X=\mathrm{grad}f$. 再由 § 2 例 4 和 Poincaré-Hopf 指数定理得到

$$\sum_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_xX=\chi(M)=\sum_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_x(-X)$$

$$=\sum_{X(x)=0}(-1)^{2k+1}\mathrm{Ind}_xX,$$

故 $2\sum\limits_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_xX=0$，$\sum\limits_{X(x)=0}\mathrm{Ind}_xX=0$. #

注 1 如果 M 可定向，我们可以利用代数拓扑中的 Poincaré 对偶定理得到 $H_i(M;\boldsymbol{R})\cong H_{2k+1-i}(M;\boldsymbol{R})$ 和

$$\chi(M)=\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i\dim H_i(M;\boldsymbol{R})$$

$$=\sum_{i=0}^{k}[(-1)^i\dim H_i(M;\boldsymbol{R})+(-1)^{2k+1-i}\dim H_{2k+1-i}(M;\boldsymbol{R})]$$

$=0$.

如果M不可定向，则利用 $\mathbf{Z}_2=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 同调群的 Poincaré 对偶和 Euler 示性数不依赖于系数群得到 $\chi(M)=\chi(M;\mathbf{Z}_2)=0$.

例 5 推论 2 的逆命题并不成立. 例如 2 维环面 $T^2=S^1\times S^1$, 有处处非 0 的 C^∞ 切向量场$\frac{\partial}{\partial\theta}$或$\frac{\partial}{\partial\varphi}$和 $\chi(T^2)=\chi(S^1\times S^1)=0$, 但 $\dim T^2=\dim(S^1\times S^1)=2$ 不为奇数.

第五章　向量丛上的 Riemann 度量和线性联络

这一章§1将第四章§3定义的 n 维 C^∞ 流形 M 的切丛上的Riemann度量推广到 C^r 向量丛上，并证明了仿紧流形上 Riemann 度量的存在性定理. §2引进向量丛上的线性联络、曲率张量、挠张量,并给出了 Cartan 结构方程. 向量沿 C^∞ 曲线的平行移动和测地线概念的引入,使流形更增加了几何的色彩. §3研究了 n 维 C^∞ Riemann 流形上的 Levi-Civita 联络（Riemann 联络),它就是挠张量为 0 和平移下保持内积不变的线性联络，证明了 Riemann 流形基本定理：Riemann 联络的存在唯一性定理. 此外,还介绍了 Riemann 截曲率和常 Riemann 截曲率的流形. §4指出了如何由 Riemann 流形的 Riemann 联络诱导 Riemann 正则子流形的Riemann联络. 还提出了Riemann 正则子流形上的第I、第II 基本形式、Weingarten 映射、Gauss 曲率方程和Codazzi-Mainardi 方程. 对于 $\boldsymbol{R}^n$(n 为奇数)中的 C^∞ 超曲面,Gauss 曲率只与第 I 基本形式有关而与第II基本形式无关的 Gauss 定理是一个极其深刻的定理. §5介绍了 Lie 导数 L_X、散度 div 和Laplace 算子Δ. §6用活动标架研究了线性联络、Levi-Civita 联络、曲率和正则子流形的局部几何.

§1　向量丛上的Riemann度量

第四章§3定义7给出了 n 维 C^∞ 流形 M 的切丛 $\xi=\{TM, M, \pi, \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}), \mathscr{E}\}$ 上的 Riemann 度量的概念,本节将此概念推广到 C^r 向量丛上.

定义1 设$\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,R),R^m,\mathscr{E}\}$为$C^r(r\in N\cup\{0\})$向量丛，$M$为$n$维$C^r$流形. $\otimes^{0,2}\xi=\{\otimes^{0,2}E,M,\pi_1,\ \mathrm{GL}(m^2,R),\ R^{m^2},\mathscr{E}^{0,2}\}$为$\xi$的$(0,2)$型$C^r$张量丛. 所谓$C^r$向量丛$\xi$上的一个$C^r$**Riemann 度量或内积**就是在每个纤维上正定和对称的C^r截面$g=\langle,\rangle:M\to\otimes^{0,2}E$. 即对任何$p\in M$, $(0,2)$型张量（双线性函数）$g_p=\langle,\rangle_p:E_p\times E_p\to R,(X,Y)\mapsto g_p(X,Y)=\langle X,Y\rangle_p$满足：

(1) $g_p(X,X)\geqslant 0$; $g_p(X,X)=0\Longleftrightarrow X=0$（正定性）；

(2) $g_p(X,Y)=g_p(Y,X)$（对称性）；

(3) g为C^r张量场（C^r性），

其中$X,Y\in E_p$为任意向量.

设$(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{E}$为$\xi$的局部平凡化，$X_i(x)=\psi_\alpha^{-1}(x,e_i)$, $i=1,\ \cdots,\ m$为$\pi^{-1}(x)$的基. $g_{ij}=g(X_i(x),\ X_j(x))$为$g$关于$(\pi^{-1}\ (U_\alpha),\ \psi_\alpha)$的分量. 由定义，显然$(g_{ij})$和它的逆矩阵$(g^{ij})$都为正定矩阵. 如果$X=\sum_{i=1}^m a^iX_i$, $Y=\sum_{j=1}^m b^jX_j$, 则$g(X,Y)=$

$$g\left(\sum_{i=1}^m a^iX_i,\ \sum_{j=1}^m b^jX_j\right)=\sum_{i,j=1}^m a^ib^jg_{ij}.$$

如果$(\pi^{-1}(U_\beta),\ \psi_\beta)\in\mathscr{E}$为$\xi$的另一局部平凡化，$\tilde{X}_i=\psi_\beta^{-1}(x,e_i)$, $i=1,\ \cdots,\ m$为$\pi^{-1}(x)$的另一基. $\tilde{g}_{ij}=g(\tilde{X}_i(x),\tilde{X}_j(x))$为$g$关于$(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)$的分量. 则

$$\tilde{g}_{ij}=g(\tilde{X}_i(x),\ \tilde{X}_j(x))=g\left(\sum_{k=1}^m d_i^kX_k,\ \sum_{l=1}^m d_j^lX_l\right)$$

$$=\sum_{k,l=1}^m d_i^kd_j^lg_{kl},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{g}_{11} & \cdots & \tilde{g}_{m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{g}_{m1} & \cdots & \tilde{g}_{mm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1^1 & \cdots & d_1^m\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_m^1 & \cdots & d_m^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11} & \cdots & g_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{m1} & \cdots & g_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1^1 & \cdots & d_m^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_1^m & \cdots & d_m^m\end{pmatrix}.$$

其中 $C=(c_j^i)=g_{\beta\alpha}(x)$, $D=(d_j^i)=C^{-1}=g_{\beta\alpha}(x)^{-1}$. 如果在上述矩阵等式两边取逆矩阵,则得到

$$\begin{pmatrix}\tilde{g}^{11} & \cdots & \tilde{g}^{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{g}^{m1} & \cdots & \tilde{g}^{mm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1^1 & \cdots & c_m^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_1^m & \cdots & c_m^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^{11} & \cdots & g^{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ g^{m1} & \cdots & g^{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1^1 & \cdots & c_1^m\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_m^1 & \cdots & c_m^m\end{pmatrix},$$

$$\tilde{g}^{ij}=\sum_{k,l=1}^{m}c_k^i c_l^j g^{kl}.$$

C^r 向量丛 ξ 上给定一个 Riemann 度量 $g=\langle,\rangle$, 直观上就是将每一点的纤维赋以内积而 Euclid 化,同时要求从一点到另一点变化时保证 C^r 性. 因此,它就是 Euclid 空间的推广.

定理 1 (Riemann 度量的存在性) 设M为 n 维 $C^r(r\geqslant 1)$ 仿紧流形,则 C^r 向量丛 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\ \mathscr{E}\}$ 上存在 C^r Riemann 度量.

证明 由第一章§3 定理,存在一个M上的坐标邻域的局部有限的开覆盖 $\{U_\alpha|\alpha\in\mu\}$以及从属于它的单位分解 $\{\rho_\alpha|\alpha\in\mu\}$. 在 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{E}$ 中, $X_i(x)=\psi_\alpha^{-1}(x,e_i)$, 令$\langle X_i(x),\ X_j(x)\rangle_\alpha=\delta_j^i$. 则

$$\begin{cases}\rho_\alpha(x)\langle,\rangle_{\alpha x}, x\in U_\alpha,\\ \quad 0 \quad , x\in M-\overline{\{y\in U_\alpha\,|\,\rho_\alpha(y)>0\}}\end{cases}$$

在M上是 C^∞的. 为方便,记它为 $\rho_\alpha\langle,\rangle_\alpha$. 于是,容易验证 $g=\langle,\rangle=\sum_{\alpha\in\mu}\rho_\alpha\langle\ ,\ \rangle$为 ξ 或E 上的一个 C^r Riemann 度量. #

推论 1 仿紧流形M上秩 m的实向量丛E 的构造群总可简化为 $O(m)$; 它可简化到 $SO(m)=\{A\in O(m)\,|\,\det A=1\}\Leftrightarrow$向量丛是可定向的.

证明 在定理 1 中,设$\{U_\alpha\}$ 为仿紧流形M的一个局部有限的坐标邻域的开覆盖. 它平凡化E. $\{\rho_\alpha\}$ 为从属于$\{U_\alpha\}$ 的单位分

解，$X_i(x)=\psi_\alpha^{-1}(x, e_i)$. 由 Gram-Schmidt 正交化过程，可使 $\{X_i(x)\}$变为关于整体 Riemann 度量$\langle,\rangle$的规范正交基$\{\bar{X}_i(x)\}$. 令平凡化映射$\bar{\psi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times \boldsymbol{R}^m, \bar{\psi}_\alpha(\bar{X}_i(x))=(x,e_i)$，则转换函数 $\bar{g}_{\beta\alpha}^{(x)}$ 将规范正交基变为规范正交基，因而它取值在正交群 $O(m)$中.

因为 $\det\bar{g}_{\beta\alpha}(x)>0\Leftrightarrow\bar{g}_{\beta\alpha}(x)\in SO(m)$，故构造群可简化到 $SO(m)\Leftrightarrow$向量丛E是可定向的. #

定义 1 中，当ξ为 n 维C^∞流形M的切丛时，$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}, Y_i=\frac{\partial}{\partial y^i}$, $m=n$. $C=(c_j^i)=g_{\beta\alpha}(p)=\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$, $D=(d_j^i)=C^{-1}=g_{\beta\alpha}(p)^{-1}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$. 于是，所有上面的公式与第四章 § 3 定义 7 中相应的公式完全一致. 此时，称(M,g)为 n 维 C^∞ Riemann 流形.

定义 2 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为 n 维C^∞ Riemann 流形，$X, Y\in T_pM$，称$\|X\|=\sqrt{\langle X,X\rangle}$为$X$的**模**. 如果$X\neq0$, $Y\neq0$，根据 Schwartz 不等式$|\langle X,Y\rangle|\leqslant\|X\|\|Y\|$ 可以定义X和Y之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$为

$$\cos\theta=\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\|Y\|}.$$

设 $\sigma:[a,b]\to M$为C^∞曲线，$\sigma'(t)=\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$为沿$\sigma$的切向量场，我们定义从 a 到 b 的 σ 的长为$(a\leqslant b)$:

$$|\sigma|_a^b=\int_a^b\sqrt{\langle\sigma'(t),\sigma'(t)\rangle}\,dt=\int_a^b\|\sigma'(t)\|dt$$

(因为被积函数连续，故积分存在有限).

一般地，一条分段 C^∞ 曲线 σ(即 $\sigma:[a, b]\to M$连续，且 σ 在$[t_i, t_{i+1}]$上为C^∞曲线，$i=1,2,\cdots,k-1$，其中$a=t_1<t_2<\cdots<t_{k-1}<t_k=b$)的长定义为

$$|\sigma|_a^b=\sum_{i=1}^{k-1}|\sigma|_{t_i}^{t_{i+1}}.$$

引理 1 $|\sigma|_a^b$的定义不依赖于$\sigma([a,b])$的参数的选取.

证明 设 $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ 是 C^∞类的，$t=\varphi(u)$，$a=\varphi(c)$，$b=\varphi(d)$，$\varphi'(u)>0$. 则$(\sigma\circ\varphi)'(u)=\varphi'(u)\sigma'(\varphi(u))$，于是，

$$\begin{aligned}&\int_a^b\sqrt{\langle\sigma'(t),\sigma'(t)\rangle}dt\\&=\int_c^d\sqrt{\langle\sigma'(\varphi(u)),\ \sigma'(\varphi(u))\rangle}\varphi'(u)du\\&=\int_c^d\sqrt{\langle(\sigma\circ\varphi)'(u),(\sigma\circ\varphi)'(u)\rangle}du.\qquad\#\end{aligned}$$

引理 2 设(M,g)为 n 维 C^∞ Riemann流形，对任何 $p,q\in M$，令

$\rho(p,q)=\inf\{|\sigma|\,|\sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线$\}$，则

$\rho(p,q)=\inf\{|\sigma|\,|\sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线，且在各段上处处 $\sigma'\neq0\}$.

证明 因为$\{\sigma|\sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线，且在各段上处处 $\sigma'\neq0\}\subset\{\sigma|\sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线$\}$，故

$\rho(p,q)=\inf\{|\sigma|\,|\sigma$为连接 p 和 q 的分段C^∞曲线$\}\leqslant\inf\{|\sigma|\,|\sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线，且在各段上处处 $\sigma'\neq0\}$.

由下确界的定义，对任何 $\varepsilon>0$，存在连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线 σ_1，使得$|\sigma_1|\leqslant\rho(p,q)+\varepsilon$. 我们可以选择连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线 σ_2，使得在各段上处处 $\sigma_2'\neq0$，且

$\inf\{|\sigma|\,|\sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线，且在各段上处处 $\sigma'\neq0\}-\varepsilon\leqslant|\sigma_2|-\varepsilon\leqslant|\sigma_1|\leqslant\rho(p,q)+\varepsilon$，令 $\varepsilon\to0^+$ 得到

$\inf\{|\sigma|\,|\sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线，且在各段上处处 $\sigma'\neq0\}\leqslant\rho(p,q)$.

所以，

$\rho(p,q)=\inf\{|\sigma|\,|\sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线，且在各段上处处 $\sigma'\neq 0\}$.

设 $\sigma_1:[a,\ b]\to M$，由 $[a,b]$ 紧致和 σ_1 的 C^∞性，存在 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<t_k=b$，使得 $\sigma_1([t_j,t_{j+1}])\subset U_j$，其中$(U_j,\ \varphi_j)$为$M$上的局部坐标系，而 $\varphi_j(U_j)$为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的凸开集，$j=0,\ 1,\cdots,\ k-1$. 容易看出，不失一般性，可以假定 $\sigma_1([a,b])\subset U$，这里$(U,\ \varphi)$，$\{x^i\}$为M上的局部坐标系，$\varphi(U)$为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的凸开集.

将$[a,b]$ k 等分，使 $\Delta t_j=t_{j+1}-t_j=\dfrac{b-a}{k}$. 现构造 σ_2 如下：令

$$\varphi\circ\sigma_2(t)=\varphi\circ\sigma_1(t_j)+\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\,(\varphi\circ\sigma_1(t_{j+1})-\varphi\circ\sigma_1(t_j)),$$

$t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}$, $j=0,1,\cdots,k-1$,

$$\varphi\circ\sigma_2(t)=(x^1\circ\sigma_2(t),\cdots,x^n\circ\sigma_2(t)).$$

由中值定理，当 $t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}$ 时，

$$\frac{dx^l\circ\sigma_2}{dt}=\frac{1}{t_{j+1}-t_j}(x^l\circ\sigma_1(t_{j+1})-x^l\circ\sigma_1(t_j))=\frac{dx^l\circ\sigma}{dt}(t_j^*),$$

$t_j\leqslant t_{j\,l}^*\leqslant t_{j+1}$.

于是，应用连续函数在紧致集上的一致连续性和可积性的定义，当 k 充分大时，有

$$|\sigma_2|_a^b=\sum_{j=0}^{k-1}|\sigma_2|_{t_j}^{t_{j+1}}=\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\sqrt{g(\sigma_2'(t),\sigma_2'(t))\,dt}$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\sqrt{g_{ls}(\varphi\circ\sigma_2(t))\frac{dx^l\circ\sigma_2}{dt}\frac{dx^s\circ\sigma_2}{dt}}dt$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\sqrt{g_{ls}(\varphi\circ\sigma_2(t))\frac{dx^l\circ\sigma_1}{dt}(t_{jl}^*)\frac{dx^s\circ\sigma_1}{dt}(t_{js}^*)}\,dt$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left(\sqrt{g_{ls}(\varphi\circ\sigma_1(t_j))\frac{dx^l\circ\sigma_1}{dt}(t_j)\frac{dx^s\circ\sigma_1}{dt}(t_j)}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)dt$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{g_{ls}(\varphi\circ\sigma_1(t_j))\frac{dx^l\circ\sigma_1}{dt}(t_j)\frac{dx^s\circ\sigma_1}{dt}(t_j)}\Delta t_j+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\sqrt{g(\sigma_1'(t),\sigma_1'(t))}dt+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=|\sigma_1|_a^b+\varepsilon,$$

注意，如果有 $\sigma_1(t_j)=\sigma_1(t_{j+1})$，则构造 σ_2 时可消去这一段. 特别,为避免恒有 $\sigma_1(t_j)=\sigma_1(t_{j+1})$，我们预先取 σ_1 不为常值映射. 由上证明得到

$|\sigma_2|-\varepsilon\leqslant|\sigma_1|$. #

引理 3 设 $(M,\ g)=(M,\langle\ ,\ \rangle)$ 为 n 维 C^∞ Riemann 流形. 对任何 $p\in M$，取 p 的局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$，使得 $\varphi(p)=0$，则存在 $a>0$，$R\geqslant r>0$，满足

$r\|\varphi(q)\|\leqslant\rho(p,\ q)\leqslant R\|\varphi(q)\|\qquad(q\in\varphi^{-1}(A),\ A=\{x\in R^n|\|x\|\leqslant a\}$.

证明 选择 $a>0$，使 $A=\{x\in\mathbf{R}^n|\|x\|\leqslant a\}\subset\varphi(U)$，在紧致集合

$$B=\{(q,X_q)|\varphi(q)\in A,X_q=\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_{i=1}^n(\lambda^i)^2=1\}$$

上，

$$\|X_q\|=\sqrt{\langle X_q,X_q\rangle}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q)\lambda^i\lambda^j}$$

为一个连续函数,它达到最大值 R 和最小值 $r>0$.

(1) 如果 σ 为 $\varphi\circ\sigma$ 的象在 A 中的任何一条分段 C^∞ 曲线，并且在各段上 $\sigma'\neq0$，所以若选取曲线 $\varphi\circ\sigma$ 的弧长为参数，则 $\sigma'=\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$\sum_{i=1}^n(\lambda^i)^2=1$. 为方便起见，令 $\sigma(0)=p,\sigma(b)=q$. 显然，$(\sigma(t),\sigma'(t))\in B$，$t\in(0,b)$. 于是，

$$|\sigma|=\int_0^b\sqrt{\langle\sigma'(t),\sigma'(t)\rangle}\,dt\geqslant\int_0^b\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\lambda^i\lambda^j}\,dt$$

$$\geqslant\int_0^b r\,dt=rb\geqslant r\|\varphi(q)\|.$$

如果 σ 为任何一条分段 C^∞曲线，且在各段上处处 $\sigma'\neq 0$. 令 q_1 为 σ 与 $\varphi^{-1}(\{x\in \boldsymbol{R}^n\mid\|x\|=a\})$的第一个交点，则

$$|\sigma|\geqslant\int_0^a\sqrt{\langle\sigma'(t),\sigma'(t)\rangle}\,dt\geqslant r\cdot a\geqslant r\|\varphi(q_1)\|.$$

由 $\rho(p,q)$的定义，有 $\rho(p,q)\geqslant r\|\varphi(q)\|$.

(2) 取特殊的 σ，使 $\varphi\circ\sigma$ 为连接 0 和 $\varphi(q)$的直线段. 于是，

$$\rho(p,q)\leqslant|\sigma|=\int_0^{\|\varphi(q)\|}\sqrt{\langle\sigma'(t),\sigma'(t)\rangle}\,dt$$

$$\leqslant\int_0^{\|\varphi(q)\|}R\,dt=R\|\varphi(q)\|.\quad\#$$

定理 2 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为连通的 Riemann流形，$\rho$ 如引理 2 中所述，则(M,ρ)为度量(距离)空间，并且由 ρ 所诱导的拓扑和流形M上的拓扑一致.

证明 先证 ρ 为M上的度量.

(1) 因为$|\sigma|\geqslant 0$，所以 $\rho(p,q)\geqslant 0$.

设 σ^k 为连续 p和 p 的分段 C^∞曲线，并且 $\varphi\circ\sigma^k$为 A 中长度等于$\frac{1}{k}$的直线段. 于是，

$$|\sigma^k|=\int_0^{\frac{1}{k}}\sqrt{\langle(\sigma^k)'(t),(\sigma^k)'(t)\rangle}\,dt\leqslant\int_0^{\frac{1}{k}}R\,dt=\frac{R}{k},$$

这就推出了

$$0\leqslant\rho(p,p)\leqslant\inf\{|\sigma^k|\mid k=1,2,\cdots\}\leqslant\inf\left\{\frac{R}{k}\mid k=1,2,\cdots\right\}=0,$$

$$\rho(p,p)=0.$$

此外，如果 $p\neq q$，则可选取充分小的 $a>0$，使得它满足引理 2 的条

件，并且使 p 的局部坐标邻域 $U_1, \overline{U}_1 = \varphi^{-1}(A), q \overline{\in} \overline{U}_1$. 于是，

$\rho(p,q) = \inf\{|\sigma| \mid \sigma$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线，且在各段上处处 $\sigma' \neq 0\} \geqslant ra > 0$. 这就证明了 $\quad \rho(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

(2) 如果 $\sigma(t)$ 为连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线，$\sigma(a) = p, \sigma(b) = q$，且在各段上处处 $\sigma' \neq 0$，则 $\sigma_1(u) = \sigma((1-u)b + ua)$ 为连接 $\sigma_1(0) = \sigma(b) = q$ 和 $\sigma_1(1) = \sigma(a) = p$ 的分段 C^∞ 曲线，且在各段上处处 $\sigma_1' \neq 0$. 容易验证 $|\sigma| = |\sigma_1|$. 再由 ρ 的定义立即可知 $\rho(p,q) = \rho(q,p)$.

(3) 取连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线 σ_1^k，再取连接 q 和 r 的分段 C^∞ 曲线 σ_2^k，使它们在各段上处处有 $(\sigma_1^k)' \neq 0, (\sigma_2^k)' \neq 0$，并且 $\lim\limits_{k\to+\infty}|\sigma_1^k| = \rho(p,q)$，$\lim\limits_{k\to+\infty}|\sigma_2^k| = \rho(q,r)$. 如果 $\sigma_1^k(a) = p, \sigma_1^k(b) = q, \sigma_2^k(c) = q, \sigma_2^k(d) = r$. 显然，

$$\sigma^k(t) = \begin{cases} \sigma_1^k(t), & a \leqslant t \leqslant b \\ \sigma_2^k\left(\dfrac{c-d}{b-e}t + \dfrac{bd-ce}{b-e}\right), & b < t \leqslant e, \end{cases}$$

为一条连接 p 和 r 的分段 C^∞ 曲线，且在各段上处处 $(\sigma^k)' \neq 0$. 于是，

$$\rho(p,r) \leqslant |\sigma^k| = |\sigma_1^k| + |\sigma_2^k|,$$

令 $k \to +\infty$，则有 $\quad \rho(p,r) \leqslant \rho(p,q) + \rho(q,r)$.

最后，从引理 3 的公式 $r\|\varphi(q)\| \leqslant \rho(p,q) \leqslant R\|\varphi(q)\|$ 推出，由 ρ 诱导的拓扑和流形 M 的拓扑是一致的. #

定理 3 设 M 为连通的 n 维 C^∞ 流形，则

(1) M 为 A_2 空间；

$\Leftrightarrow$ (2) M 是 σ 紧的；

$\Leftrightarrow$ (3) M 是仿紧的；

$\Leftrightarrow$ (4) 在 M 上存在 Riemann 度量；

$\Leftrightarrow$ (5) M 为度量空间.

证明 (1)⇒(2) 由第一章§3定理1(2).

(2)⇒(3) 由第一章§3定理1(1).

(3)⇒(4) 由定理1.

(4)⇒(5) 由定理2.

(5)⇒(1) 参阅[徐森林, 290—292页]. #

引理4 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为$n$维$C^\infty$ Riemann流形，则在任何局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$中，必存在C^∞的规范正交基.

证明 根据Gram-Schmidt正交化过程，设

$$\begin{cases} Y_1=\dfrac{\partial}{\partial x^1} \\ Y_2=\lambda_{21}\dfrac{\partial}{\partial x^1}+\dfrac{\partial}{\partial x^2} \\ Y_3=\lambda_{31}\dfrac{\partial}{\partial x^1}+\lambda_{32}\dfrac{\partial}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ \cdots \\ Y_n=\lambda_{n1}\dfrac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\lambda_{n,n-1}\dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial x^n}. \end{cases}$$

由$\langle Y_i,Y_j\rangle=0(i\neq j)$可推出$\left\langle\dfrac{\partial}{\partial x^i},Y_j\right\rangle=0(i<j)$即

$$\lambda_{j1}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^1}\right\rangle+\lambda_{j2}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^2}\right\rangle+\cdots+\lambda_{j,j-1}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^{j-1}}\right\rangle$$
$$+\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=0,$$

$i=1,\cdots,j-1$. 于是，可推出$\lambda_{ji}(j=2,3,\cdots n,\ i<j)$为$\left\langle\dfrac{\partial}{\partial x^k},\dfrac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle$的有理函数，因而$Y_i$在$U$上是$C^\infty$的. 令$e_i=\dfrac{Y_i}{\|Y_i\|}=\dfrac{Y_i}{\sqrt{\langle Y_i,Y_i\rangle}}$，则$\{e_i\,|\,i=1,\cdots,n\}$为$U$上的$C^\infty$规范正交基. #

引理5 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为$n$维Riemann流形. $\{e_i\,|\,i=1,\cdots,n\}$和$\{\bar{e}_i\,|\,i=1,\cdots,n\}$为$T_pM$的规范正交基，而

$\{e^i \mid i=1,\cdots,n\}$和 $\{\bar{e}^i \mid i=1,\cdots, n\}$ 分别为它们的对偶基. 如果 $\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}=\overrightarrow{[\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n]}$ (定向相同),则

$$e^1\wedge\cdots\wedge e^n=\bar{e}^1\wedge\cdots\wedge\bar{e}^n.$$

此外,如果 p 的局部坐标系(U,φ), $\{x^i\}$ 与$\overrightarrow{[e_1,\cdots, e_n]}$ 一致,即$\overrightarrow{[e_1, \cdots, e_n]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]_p}$, 则

$$e^1\wedge\cdots\wedge e^n=\sqrt{\det(g_{ij})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

其中 $g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$.

证明 令

$$\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \vdots\\ \bar{e}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix},$$

其中(c_{ij})为正交矩阵且 $\det(c_{ij})=1$. 如果

$$\begin{pmatrix}\bar{e}^1\\ \vdots\\ \bar{e}^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_{11} & \cdots & d_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_{n1} & \cdots & d_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^1\\ \vdots\\ e^n\end{pmatrix},$$

则(d_{ij})是$(c_{ij})'$的逆矩阵,于是(d_{ij})也为正交矩阵,且$\det(d_{ij})=1$,这就证明了

$$\bar{e}^1\wedge\cdots\wedge\bar{e}^n=\left(\sum_{i_1=1}^n d_{1i_1}e^{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_n=1}^n d_{ni_n}e^{i_n}\right)$$

$$=\det(d_{ij})e^1\wedge\cdots\wedge e^n=e^1\wedge\cdots\wedge e^n.$$

设$\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$, 则

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\left\langle\sum_{l=1}^n a_{il}e_l,\ \sum_{s=1}^n a_{js}e_s\right\rangle=\sum_{l=1}^n a_{il}a_{jl},$$

即 $(g_{ij})=(a_{il})(a_{il})'$，所以

$$\det(a_{il})=\sqrt{\det(g_{ij})}>0.$$

由于$e^i=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}dx^j$，故

$$e^1\wedge\cdots\wedge e^n=\left(\sum_{j_1=1}^{n}a_{j_1 1}dx^{j_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j_n=1}^{n}a_{j_n n}dx^{j_n}\right)$$

$$=\det(a_{ij})dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\sqrt{\det(g_{ij})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n. \quad \#$$

定义 3 设(M,g)为n维C^∞可定向的 Riemann 流形，由引理 4 和 5，在M上确定了一个处处非 0 的C^∞ n形式，它在每个与M的定向$\mathcal{O}=\{o_p\mid p\in M\}$，一致的局部坐标系$(U,\varphi)$，$\{x^i\}$中（即$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]_p}=o_p$）可表示为

$$e^1\wedge\cdots\wedge e^n=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

我们称它为M上的由定向$\mathcal{O}=\{o_p\mid p\in M\}$确定的**体积元**，记作$dV$（例 3 表明$dV$只是闭形式而不必为恰当微分形式）．当$n=1$时，称为弧长元，记作$ds$；当$n=2$时，称为面积元，记作$dA$.

定义 4 设(M,g)为n维C^∞Riemann 流形（M不必是可定向的），我们定义**绝对体积元**为

$$|dV|=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\cdots dx^n$$

（在局部坐标系$\{x^i\}$中的表示）.

设f为M上具有紧致支柱 ($\mathrm{Supp}f=\overline{\{x\in M\mid f(x)\neq 0\}}$) 的连续函数，更进一步可以定义**第一型积分**

$$\int_M f|dV|=\sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(f\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot(\rho_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})$$

$$\cdot\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n,$$

容易验证，它与M上的局部有限的局部坐标系$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x_\alpha^i\}\mid$

$\alpha\in\mu\}$ 以及从属于它的单位分解 $\{\rho_\alpha|\alpha\in\mu\}$ 的选取无关. 对于 M 上的任意连续函数 f，令

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ 0, & f(x)<0.\end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases}0, & f(x)>0,\\ -f(x), & f(x)\leqslant 0.\end{cases}$$

如果 (M,g) 为 n 维 C^∞ 连通 Riemann 流形，根据定理 3，M 是 σ 紧的，因此存在 M 中的开集 M_k，使得 $\overline{M}_k$ 紧致，$M=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$ 且 $M_1\subset\overline{M}_1\subset M_2\subset\overline{M}_2\subset\cdots$. 当

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{M_k}f^+|dV| \text{ 和 } \lim_{k\to+\infty}\int_{M_k}f^-|dV|$$

中至少有一个有限时，定义

$$\int_M f|dV|=\lim_{k\to+\infty}\int_{M_k}f^+|dV|-\lim_{k\to+\infty}\int_{M_k}f^-|dV|$$

为 f 在 M 上的**广义第一型积分**. 明显地，它是第一型积分的推广. 值得注意的是这定义与 $\{M_k|k=1,2,\cdots\}$ 的选取无关，且广义积分值可为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

当 $f=1$ 时，称 $\int_M|dV|=\sum\limits_\alpha\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(\rho_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n$ 为 M 的**体积**. 它也可为 $+\infty$. 1 维和 2 维情形，"体积"通常称为"长度"和"面积".

特别当 M 为 n 维 C^∞ 紧致 Riemann 流形时，上述的 $\lim\limits_{k\to+\infty}\int_{M_k}f^+|dV|$，$\lim\limits_{k\to,+\infty}\int_{M_k}f^-|dV|$，$\int_{M_k}f|dV|$ 都为有限值. 还可选取 $M_k=M$. $k=1,2,\cdots$.

如果 $\vec{M}$ 为定向流形，$dV=e^1\wedge\cdots\wedge e^n$ 为体积元，则

$$\int_M f|dV|=\int_{\vec{M}}fe^1\wedge\cdots\wedge e^n\ .$$

为区别起见，我们称定向流形$\vec{M}$上的外微分形式ω的积分$\int_{\vec{M}}\omega$为**第二型积分**.

例 1 设$\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}\}$为$C^r(r\in \boldsymbol{N}\cup\{0\})$向量丛，$M$为$n$维$C^r$流形，$g: M\to\bigotimes^{0,2}E$为$\xi$的$C^r$Riemann度量，$F\subset E$是秩为$k$的子向量丛，则

$$F^{\perp}=\bigcup_{x\in M}F_x{}^{\perp}=\bigcup_{x\in M}\{v_x\in E_x \mid v_x\perp F_x\}$$

为秩$m-k$的子向量丛. 用自然的方法，g视作F和$F^{\perp}$上的Riemann度量.

设$(\pi^{-1}(U), \psi)\in\mathscr{E}$使得$\psi(F|_U)=U\times\boldsymbol{R}^k\subset U\times\boldsymbol{R}^m$，$\{e_i\mid i=1,\cdots,m\}$为$\boldsymbol{R}^m$的标准基向量，$X_i(x)=\psi(x, e_i)$，$i=1,\cdots,m$为$E|_U$上的$C^r$截面，$\{X_i(x)\mid i=1,\cdots,m\}$为$\pi^{-1}(x)$的基. 借助于Gram-Schmidt正交化过程得到$E|_U$的C^r截面$\overline{X}_i(x)$，$i=1,\cdots,m$，使得对任何$x\in U$，$\{\overline{X}_i(x)\mid i=1,\cdots,m\}$为$E_x$的规范正交基，而$\{\overline{X}_i(x)\mid i=1,\cdots,k\}$张成$F_x$，$\{\overline{X}_i(x)\mid i=k+1,\cdots,m\}$张成$F_x^{\perp}$. 因此，

$$\overline{\psi}: \pi^{-1}(U)=E|_U\to U\times\boldsymbol{R}^m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda^i\overline{X}_i(x)\longmapsto(x,\lambda^1,\cdots,\lambda^m)$$

定义了一个丛图卡$(\pi^{-1}(U),\overline{\psi})\in\mathscr{E}$，使得

$$\overline{\psi}(F|_U)=U\times\boldsymbol{R}^k, \overline{\psi}(F^{\perp}|_U)=U\times\boldsymbol{R}^{m-k}.$$

称$F^{\perp}$为F关于E的**正交补丛**.

回想一下第四章§3定义3和结合上述定义，不难给出法丛的概念.

设$\xi=\{TM, M, \pi, \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^n, \mathscr{E}\}$为$n$维$C^\infty$流形$M$的切丛，$g$为其$C^\infty$Riemann度量. $K\subset M$为k维C^∞正则子流形. 显然K的切丛$\xi_K=\{TK, K, \pi_K, \mathrm{GL}(k, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^k, \mathscr{E}_K\}$为$K$上秩为$k$的

C^∞向量丛. 类似上述,称秩 $n-k$ 的向量丛

$$TK^\perp = \bigcup_{x\in K} T_xK^\perp = \bigcup_{x\in K}\{u_x\in T_xM \mid u_x\perp T_xK\}$$

为K 上关于M的**法丛**.

例 2 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为 n 维 C^∞Riemann 流形. σ: $[a, b]\to M$ 为 C^∞曲线, 则在 M 的局部坐标系$\{x^i\}$中, 曲线弧长为

$$\begin{aligned}
s &= \int_a^t \sqrt{g(\sigma'(t),\sigma'(t))}\,dt \\
&= \int_a^t \sqrt{g\left(\sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}\,dt \\
&= \int_a^t \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt.
\end{aligned}$$

于是, 弧长元

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt \\
&= \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\cdots\frac{dx^n}{dt}\right)\begin{pmatrix} g_{11}\cdots g_{1n} \\ \cdots \\ g_{n1}\cdots g_{nn}\end{pmatrix}\left(\frac{dx^1}{dt}\cdots\frac{dx^n}{dt}\right)'}\,dt.
\end{aligned}$$

在微分几何里, 有时记作 $ds^2=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx^idx^j$.

更一般地,如果 K 为M的 k 维 C^∞ 正则子流形, $\{u^i\mid i=1,\cdots,k\}$为定向流形 $\vec{K}$ 的局部坐标系. 则 K 上的 k 维体积元为

$$\begin{aligned}
dV &= \sqrt{\det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)}\,du^1\wedge\cdots\wedge du^k \\
&= \sqrt{\det\left(g\left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x^l}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^l}, \sum_{s=1}^n \frac{\partial x^s}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial x^s}\right)\right)}\,du^1\wedge\cdots\wedge du^k \\
&= \sqrt{\det\left(\sum_{l,s=1}^n g_{ls}\frac{\partial x^l}{\partial u^i}\frac{\partial x^s}{\partial u^j}\right)}\,du^1\wedge\cdots\wedge du^k
\end{aligned}$$

$$=\sqrt{\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\cdots\frac{\partial x^n}{\partial u^1}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^k}\cdots\frac{\partial x^n}{\partial u^k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11}\cdots g_{1n}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ g_{n1}\cdots g_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\cdots\frac{\partial x^1}{\partial u^k}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1}\cdots\frac{\partial x^n}{\partial u^k}\end{pmatrix}}\,du^1\wedge\cdots\wedge du^k$$

例 3 设$\{x^i\}$为 $\boldsymbol{R}^n$ 的通常的整体坐标系. 定义 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 C^∞ Riemann 度量为

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta^i_j,$$

$$\langle X,\ Y\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{j=1}^n b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\sum_{i,\ j=1}^n a^ib^j.$$

显然,$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$为整体的规范正交的 C^∞坐标基向量场, 而$\{dx^i\}$为其对偶基,$dV=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 为体积元.

设$\vec{M}$为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的$(n-1)$维 C^∞定向正则子流形,M 上的局部坐标系$\{u^1,\cdots,u^{n-1}\}$与$\vec{M}$一致,由$\boldsymbol{R}^n$ 的上述Riemann 度量诱导出M上的一个 Riemann 度量. 设$\sum_{i=1}^n h^i\frac{\partial}{\partial x^i}$为$M$上的与 $\vec{M}$相一致的 C^∞单位法向量场. 则

$$\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}h^i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}h^i\frac{\partial(x^1\cdots\hat{x}^i\cdots x^n)}{\partial(u^1\cdots u^{n-1})}du^1\wedge\cdots\wedge du^{n-1}$$

$$=\det\begin{pmatrix}h^1 & \cdots & h^n\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}}\end{pmatrix}du^1\wedge\cdots\wedge du^{n-1}$$

$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix} h^1 & \cdots & h^n \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^1 & \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ h^n & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix}}\, du^1\wedge\cdots\wedge du^{n-1}$$

$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^1} \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}} \right\rangle \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial x}{\partial u^1} \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial x}{\partial u^{n-1}} \right\rangle \end{pmatrix}}\, du^1\wedge\cdots\vee du^{n-1}$$

$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix}}$$

$$\cdot du^1\wedge\cdots\wedge du^{n-1} = dV.$$

注意，其中 $g_{ij}=\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta^i_j$.

显然，$\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{r^n}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$ 为 $\mathbf{R}^n-\{0\}$ 上的 C^∞ 的 $(n-1)$ 形式 $\left(r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2}\right)$，且

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\left(\frac{1}{r^n}-\frac{nx^i\frac{x^i}{r}}{r^{n+1}}\right)dx^i\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots$$
$$\wedge dx^n = 0,$$

故 ω 为 $\mathbf{R}^n-\{0\}$ 上的 $(n-1)$ 闭形式. 因为 M 为 $n-1$ 维 C^∞ 流形，故

$\omega|_M$为$(n-1)$闭形式是显然的.

因为对 $r_0>0, S^{n-1}(r_0)=\left\{(x^1,\cdots,x^n)\in \mathbf{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2=r_0^2\right\}$

上的 C^∞单位法向量场为$\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{r_0}\frac{\partial}{\partial x^i}$，故

$$\frac{dV}{r_0^{n-1}}=\frac{1}{r_0^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{r_0}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\omega|_{S^{n-1}(r_0)}.$$

如果 $\omega|_{S^{n-1}(r)}$或 dV 为 $S^{n-1}(r_0)$上的恰当微分形式，则存在 $S^{n-1}(r_0)$上的 $C^\infty(n-2)$形式 η，使 $\omega=d\eta$. 由 Stokes 定理得到

$$\int_{\overrightarrow{S^{n-1}(r_0)}}\omega=\int_{\overrightarrow{S^{n-1}(r_0)}}d\eta=\int_{\overrightarrow{\partial S^{n-1}(r_0)}}\eta=\int_{\varnothing}\eta=0,$$

这与$\int_{\overrightarrow{S^{n-1}(r_0)}}\omega=\int_{\overrightarrow{S^{n-1}(r_0)}}\frac{dV}{r_0^{n-1}}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\neq 0$ 相矛盾$\left(\text{其中}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\text{为}\right.$数学分析中得到的 $n-1$ 维单位球面 $S^{n-1}(1)=S^{n-1}$ 的体积$\left.\right)$.

此外，如果 ω 为 $\mathbf{R}^n-\{0\}$上的恰当微分形式，则存在 $\mathbf{R}^n-\{0\}$上的 $C^\infty(n-2)$形式 η，使得 $\omega=d\eta$. 设 $I:S^{n-1}(r_0)\to\mathbf{R}^n-\{0\}$为包含映射. 于是 $I^*\omega=I^*d\eta=d(I^*\eta)$为 $S^{n-1}(r_0)$ 上的恰当微分形式，这与上面已证得的结果相矛盾.

以上证明了 ω 和 dV 都不是 $\mathbf{R}^n-\{0\}$上的恰当微分形式.

例 4 设 $\mathbf{R}^3$ 的通常的整体坐标系为$\{x,y,z\}$，$\overrightarrow{M}$为 $\mathbf{R}^3$ 中的 2 维 C^∞定向正则子流形，M上的局部坐标系$\{u,v\}$与$\overrightarrow{M}$一致，由 $\mathbf{R}^3$ 的通常的 Riemann 度量诱导出M上的一个 Riemann 度量，则在此局部坐标系中，与M一致的 C^∞单位法向量场为

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right\|}=h^1\frac{\partial}{\partial x}+h^2\frac{\partial}{\partial y}+h^3\frac{\partial}{\partial z}.$$

8

于是，M 上的面积元为

$$
\begin{aligned}
dA &= h^1 dy\wedge dz - h^2 dx\wedge dz + h^3 dx\wedge dy \\
&= h^1 dy\wedge dz + h^2 dz\wedge dx + h^3 dx\wedge dy \\
&= \left(h^1 \frac{\partial(yz)}{\partial(uv)} + h^2 \frac{\partial(zx)}{\partial(uv)} + h^3 \frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} \right) du\wedge dv \\
&= \det\begin{pmatrix} h^1 & h^2 & h^3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} du\wedge dv \\
&= \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x} + h^2 \frac{\partial}{\partial y} + h^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right) du\wedge dv \\
&= \left| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right| du\wedge dv.
\end{aligned}
$$

如果记 $E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$, $G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$, $F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$, 则

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right| \\
&= \sqrt{ \det \begin{pmatrix} h^1 & h^2 & h^3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ h^2 & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ h^3 & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} } \\
&= \sqrt{ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{pmatrix} } \\
&= \sqrt{EG - F^2},
\end{aligned}
$$

故

$$
dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\wedge dv.
$$

§2 向量丛上的线性联络

设 $\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}\}$ 为 n 维 C^∞ 流形 M 上的 C^∞ 向量丛. ξ 或 E 上的 C^∞ 截面的全体记为 $C^\infty(\xi)$ 或 $C^\infty(E)$，即 $C^\infty(\xi)=C^\infty(E)=\{\omega \mid \omega: M\to E$ 为 C^∞ 映射，且 $\pi\circ\omega(x)=x, x\in M\}$.

例 1 设 M 为 n 维 C^∞ 流形, $\xi=\{M\times\boldsymbol{R}, M, \pi, \mathrm{GL}(1, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}, \mathscr{E}\}$ 为平凡实线丛，其中投影 $\pi: M\times\boldsymbol{R}\to M, \pi(x, a)=x$. 可视 $M\times\boldsymbol{R}$ 上的 C^∞ 截面的全体 $C^\infty(M\times\boldsymbol{R})$ 为 $C^\infty(M, \boldsymbol{R})$. 它关于通常的加法、乘法为含有 1 的交换代数.

例 2 设 $\xi=\{TM, M, \pi, \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^n, \mathscr{E}\}$ 为 n 维 C^∞ 流形 M 上的切丛. $C^\infty(\xi)=C^\infty(TM)$ 是 M 上 C^∞ 切向量场关于通常的加法、方括号运算[,]的无限维 Lie 代数.

定义 1 C^∞ 向量丛 $\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}\}$ 或 E 上的**线性(或仿射)联络**是截面空间上的一个映射

$$\nabla: C^\infty(TM)\times C^\infty(E)\to C^\infty(E), \quad (X, \omega)\mapsto\nabla(X, \omega)=\nabla_X\omega,$$

满足：(1) $\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}\omega=f_1\nabla_{X_1}\omega+f_2\nabla_{X_2}\omega$, $f_1, f_2\in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$, $X_1, X_2\in C^\infty(TM), \omega\in C^\infty(E)$;

(2) $\nabla_X(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1\nabla_X\omega_1+\lambda_2\nabla_X\omega_2$, $\lambda_1, \lambda_2\in\boldsymbol{P}$, $X\in C^\infty(TM), \omega_1, \omega_2\in C^\infty(E)$;

(3) $\nabla_X(f\omega)=(\nabla_Xf)\omega+f\nabla_X\omega$(导性), $f\in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$, $X\in C^\infty(TM)$, $\omega\in C^\infty(E)$, 其中 $\nabla_Xf=df(X)=Xf$ 为 f 沿 X 方向的方向导数. 称 $\nabla_X\omega$ 为 ω 关于 X 的**协变导数**.

定义 2 线性联络 ∇ 的**曲率张量**($C^\infty(E)$ 值)是

$$R: C^\infty(TM)\times C^\infty(TM)\times C^\infty(E)\to C^\infty(E),$$

$$R(X, Y)\omega=\nabla_X\nabla_Y\omega-\nabla_Y\nabla_X\omega-\nabla_{[X, Y]}\omega=-R(Y, X)\omega,$$ 则 $R(X, Y)=-R(Y, X)$.

引理 1 R 关于 X, Y, ω 都是 $C^\infty(M, \boldsymbol{R})$ 线性的.

证明 对任何 $f\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R}),X,Y\in C^{\infty}(TM)$, $\omega\in C^{\infty}(E)$，只须证明:

$$
\begin{aligned}
&R(fX,Y)\omega=\nabla_{fX}\nabla_Y\omega-\nabla_Y\nabla_{fX}\omega-\nabla_{[fX,Y]}\omega\\
&=f\nabla_X\nabla_Y\omega-\nabla_Y(f\nabla_X\omega)-\nabla_{-(Yf)X+f[X,Y]}\omega\\
&=f(\nabla_X\nabla_Y\omega-\nabla_Y\nabla_X\omega-\nabla_{[X,Y]}\omega)-(Yf)\nabla_X\omega+(Yf)\nabla_X\omega\\
&=fR(X,Y)\omega,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)(f\omega)=\nabla_X\nabla_Y(f\omega)-\nabla_Y\nabla_X(f\omega)-\nabla_{[X,Y]}(f\omega)\\
&=\nabla_X((Yf)\omega+f\nabla_Y\omega)-\nabla_Y((Xf)\omega+f\nabla_X\omega)-([X,Y]f)\omega\\
&\quad-f\nabla_{[X,Y]}\omega\\
&=f(\nabla_X\nabla_Y\omega-\nabla_Y\nabla_X\omega-\nabla_{[X,Y]}\omega)+(XYf-YXf-[X,\\
&\quad Y]f)\omega+(Yf)\nabla_X\omega+(Xf)\nabla_Y\omega-(Xf)\nabla_Y\omega-(Yf)\nabla_X\omega\\
&=fR(X,Y)\omega.
\end{aligned}
$$

#

例 3 设 ∇^E,∇^F 为M的 C^{∞} 向量丛 ξ (E 为丛空间)，η(F 为丛空间)上的线性联络．在ξ 和 η 的 Whitney 和 $\xi\oplus\eta$ 上定义线性联络 $\nabla: C^{\infty}(TM)\times C^{\infty}(E\oplus F)\to C^{\infty}(E\oplus F)$ 为 $\nabla_X(\omega\oplus\theta)=\nabla^E_X\omega\oplus\nabla^F_X\theta$ (根据定义 1，读者验证 ∇ 为 $\xi\oplus\eta$ 上的线性联络)．

例 4 设 $\xi^*: E^*\to M$ 为 C^{∞}向量丛 $\xi: E\to M$ 的对偶丛．关于 ξ 的线性联络 ∇ 的 ξ^* 的对偶线性联络 ∇^*由

$$(\nabla^*_X\theta).\ \omega=\nabla_X(\theta.\ \omega)-\theta.\ \nabla_X\omega,\quad \theta\in C^{\infty}(E^*),\omega\in C^{\infty}(E)$$

给出 (其中 · 表示对偶丛 E^*中向量对 E 中向量的作用)．它的曲率张量是由等式

$$
\begin{aligned}
&R^*(X,Y)\theta.\ \omega+\theta.\ R(X,Y)\omega=0,\quad X,Y\in C^{\infty}(TM),\\
&\qquad\qquad \theta\in C^{\infty}(E^*),\omega\in C^{\infty}(E),
\end{aligned}
$$

给出的．

∇^*满足定义 1 中的(1)(2)是显然的．现在验证(3)也成立．事实上，

$$(\nabla^*_Xf\theta).\ \omega=\nabla_X(f\theta.\omega)-f\theta.\ \nabla_X\omega$$

$$=f(\nabla_X(\theta.\ \omega)-\theta.\ \nabla_X\omega)+(\nabla_X^*f)(\theta.\ \omega)$$
$$=((\nabla_X^*f)\theta+f\nabla_X^*\theta).\ \omega,$$
$$\nabla_X^*(f\theta)=(\nabla_X^*f)\theta+f\nabla_X^*\theta.$$

此外，

$$R^*(X,Y)\theta.\ \omega=(\nabla_X^*\nabla_Y^*\theta-\nabla_Y^*\nabla_X^*\theta-\nabla_{[X,\ Y]}^*\theta).\ \omega$$
$$=\nabla_X(\nabla_Y^*\theta.\ \omega)-\nabla_Y^*\theta.\ \nabla_X\omega-\nabla_Y(\nabla_X^*\theta.\ \omega)+\nabla_X^*\theta.\ \nabla_Y\omega$$
$$-\nabla_{[X,\ Y]}(\theta.\ \omega)+\theta.\ \nabla_{[X,\ Y]}\omega$$
$$=\nabla_X(\nabla_Y(\theta.\ \omega)-\theta.\ \nabla_Y\omega)-\nabla_Y(\theta.\ \nabla_X\omega)+\theta.\ \nabla_Y\nabla_X\omega$$
$$-\nabla_Y(\nabla_X(\theta.\ \omega)-\theta.\ \nabla_X\omega)+\nabla_X(\theta.\ \nabla_Y\omega)-\theta.\ \nabla_X\nabla_Y\omega$$
$$-(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X)(\theta.\ \omega)+\theta.\ \nabla_{[X,\ Y]}\omega$$
$$=\theta.\ (\nabla_Y\nabla_X\omega-\nabla_X\nabla_Y\omega+\nabla_{[X,\ Y]}\omega)=-\theta.\ R(X,Y)\omega,$$
$$R^*(X,Y)\theta.\ \omega+\theta.\ R(X,Y)\omega=0.\qquad \#$$

例 5 设 V,W 为有限维实向量空间，而

$$V\dot{\times}W=\left\{\sum_{i=1}^{s}\lambda^i(v_i,w_i)\mid\lambda^i\in\mathbf{R},v_i\in V,w_i\in W,s\in\mathbf{N}\right\}$$

为 V 和 W 的积集合 $V\times W=\{(v,w)\mid v\in V,w\in W\}$ 中所有元素为基产生的实数域 $\mathbf{R}$ 上的向量空间（大空间）．令 T 为所有形如 $(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)$，$(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2)$，$(\lambda v,w)-\lambda(v,w)$，$(v,\lambda w)-\lambda(v,w)$ 的元素产生的 $V\dot{\times}W$ 的子向量空间，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，$v,v_1,v_2\in V$；$w,w_1,w_2\in W$．我们定义 V 和 W 的张量积为

$$V\otimes W=V\dot{\times}W/T,$$

易见它也是一个向量空间．如果用 $[a]$ 表示 $a\in V\dot{\times}W$ 的等价类，则 $[a]=\{a+b\mid b\in T\}$．此时，

$$[a]+[b]=[a+b],\quad \lambda[a]=[\lambda a],$$

$a,b\in V\dot{\times}W,\lambda\in\mathbf{R}$．因为

$$0=[(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)]$$
$$=[(v_1+v_2,w)]-[(v_1,w)]-[(v_2,w)],$$

$$0=[(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2)]$$
$$=[(v,w_1+w_2)]-[(v,w_1)]-[(v,w_2)],$$
$$0=[(\lambda v,w)-\lambda(v,w)]=[(\lambda v,w)]-\lambda[(v,w)],$$
$$0=[(v,\lambda w)-\lambda(v,w)]=[(v,\lambda w)]-\lambda[(v,w)],$$

故

$$[(v_1+v_2,w)]=[(v_1,w)]+[(v_2,w)],$$
$$[(v,w_1+w_2)]=[(v,w_1)]+[(v,w_2)],$$
$$[(\lambda v,w)]=[(v,\lambda w)]=\lambda[(v,w)].$$

为运算方便，记$[(v,w)]=v\otimes w$. 于是，上述公式成为

$$(v_1+v_2)\otimes w=v_1\otimes w+v_2\otimes w,$$
$$v\otimes(w_1+w_2)=v\otimes w_1+v\otimes w_2,$$
$$(\lambda v)\otimes w=v\otimes(\lambda w)=\lambda(v\otimes w).$$

更一般地有$\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda^i v_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{t}\mu^j w_j\right)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\lambda^i\mu^j v_i\otimes w_j$. 如果$\{e_i\,|\,i=1,\cdots,m\}$为$m$维向量空间$V$的基，$\{f_j\,|\,j=1,\cdots,n\}$为$n$维向量空间$W$的基. 则可证$\{e_i\otimes f_j\,|\,i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n\}$为$V\otimes W$的基，且它为$mn$维向量空间. 设$\{\bar{e}_i\,|\,i=1,\cdots,m\}$和$\{\bar{f}_j\,|\,j=1,\cdots,n\}$分别为$V$和$W$的另外的基，并且

$$\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \vdots\\ \bar{e}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1m}\\ \cdots&&\cdots\\ c_{m1}&\cdots&c_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_m\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{f}_1\\ \vdots\\ \bar{f}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_{11}&\cdots&d_{1n}\\ \cdots&&\cdots\\ d_{n1}&\cdots&d_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}.$$

因此，$\bar{e}_k\otimes\bar{f}_l=\left(\sum_{i=1}^{m}c_{ki}e_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{n}d_{lj}f_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ki}d_{lj}e_i\otimes f_j$, 即

$$(\bar{e}_k\otimes\bar{f}_l)=(c_{ki})(e_i\otimes f_j)(d_{jl})'.$$

对于任何 $u\in V\otimes W$ 有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda^{ij}e_i\otimes f_j=u$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\bar{\lambda}^{kl}\bar{e}_k\otimes\bar{f}_l=\sum_{k,i=1}^{m}\sum_{l,j=1}^{n}\bar{\lambda}^{kl}c_{ki}d_{lj}e_i\otimes f_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\bar{\lambda}^{kl}c_{ki}d_{lj}\right)e_i\otimes f_j,$$

$$(\lambda^{ij})=(c_{ik})'(\bar{\lambda}^{kl})(d_{lj}).$$

设 $\xi=\{E,M,\pi_E,\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}),\ \boldsymbol{R}^m,\ \mathscr{E}_E\}$，$\eta=\{F,\ M,\ \pi_F,\mathrm{GL}(k,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^k,\ \mathscr{E}_F\}$ 为 n 维 C^∞ 流形 M 上的 C^∞ 向量丛. 类似于 ξ 的对偶丛 ξ^*，ξ 和 η 的 Whitney 和，可以构造 ξ 和 η 的张量积丛

$$\xi\otimes\eta=\{E\otimes F,M,\pi_{E\otimes F},\mathrm{GL}(mk,\boldsymbol{R}),\boldsymbol{R}^{mk},\mathscr{E}_{E\otimes F}\}.$$

设 ∇^E，∇^F 分别为 ξ 和 η 上的线性联络. 我们定义 $\xi\otimes\eta$ 上的张量积联络 ∇，使得

$$\nabla_X(\omega\otimes\theta)=(\nabla^E_X\omega)\otimes\theta+\omega\otimes(\nabla^F_X\theta),\quad X\in C^\infty(TM).$$

它的曲率张量为

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(\omega\otimes\theta)&=\nabla_X\nabla_Y(\omega\otimes\theta)-\nabla_Y\nabla_X(\omega\otimes\theta)\\
&\quad-\nabla_{[X,Y]}(\omega\otimes\theta)\\
&=\nabla_X\{(\nabla^E_Y\omega)\otimes\theta+\omega\otimes\nabla^F_Y\theta\}-\nabla_Y\{(\nabla^E_X\omega)\otimes\theta+\omega\otimes\nabla^F_X\theta\}\\
&\quad-\{(\nabla^E_{[X,Y]}\omega)\otimes\theta+\omega\otimes\nabla^F_{[X,Y]}\theta\}\\
&=(\nabla^E_X\nabla^E_Y\omega)\otimes\theta+(\nabla^E_Y\omega)\otimes\nabla^F_X\theta+(\nabla^E_X\omega)\otimes\nabla^F_Y\theta\\
&\quad+\omega\otimes(\nabla^F_X\nabla^F_Y\theta)-(\nabla^E_Y\nabla^E_X\omega)\otimes\theta-(\nabla^E_X\omega)\otimes\nabla^F_Y\theta\\
&\quad-(\nabla^E_Y\omega)\otimes\nabla^F_X\theta-\omega\otimes\nabla^F_Y\nabla^F_X\theta-(\nabla^E_{[X,Y]}\omega)\otimes\theta\\
&\quad-\omega\otimes\nabla^F_{[X,Y]}\theta\\
&=R^E(X,Y)\omega\otimes\theta+\omega\otimes R^F(X,Y)\theta,
\end{aligned}$$

即 $$R(X,Y)(\omega\otimes\theta)=R^E(X,Y)\omega\otimes\theta+\omega\otimes R^F(X,Y)\theta,$$

$$X,Y\in C^\infty(TM),\omega\in C^\infty(E),\theta\in C^\infty(F).$$

注 1 张量积 $V\otimes W$ 的第二种定义为 $V\otimes W=\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda^{ij}e_i\otimes f_j\right\}$. 第三种定义为将 V, W 分别视作 $V^{**}=(V^*)^*$ 和 $W^{**}=(W^*)^*$,然后 $V\otimes W$ 可按第三章§1张量积$\otimes$来定义.

类似地,对 n_i 维实向量空间 V_i, $i=1,\cdots,s$ 可定义张量积 $V_1\otimes\cdots\otimes V_s$. 则 $\otimes^{r,s}V=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s\text{个}}$. 至于与向量丛相关的内容不再一一赘述.

例 6 设 $M\times\mathbf{R}$ 为 n 维 C^∞ 流形 M 上的 C^∞ 平凡线丛,在 $M\times\mathbf{R}$ 上定义线性联络为

$$\nabla_X f=df(X)=Xf,\ f\in C^\infty(M,\mathbf{R}),\ X\in C^\infty(TM).$$

显然, $R(X,Y)f=\nabla_X\nabla_Y f-\nabla_Y\nabla_X f-\nabla_{[X,Y]}f=(XY-YX-[X,Y])f=0$. 读者将此推广到 $M\times\mathbf{R}^m$.

例 7 设 ∇ 为 n 维 C^∞ 流形 M 的切丛 TM 上的线性联络,即 $\nabla: C^\infty(TM)\times C^\infty(TM)\to C^\infty(TM)$, $(X,Y)\mapsto\nabla_X Y$, 满足:

(1) $\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}Y=f_1\nabla_{X_1}Y+f_2\nabla_{X_2}Y$, $f_1,f_2\in C^\infty(M,\mathbf{R})$, X_1, X_2, $Y\in C^\infty(TM)$;

(2) $\nabla_X(\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2)=\lambda_1\nabla_XY_1+\lambda_2\nabla_XY_2$, λ_1, $\lambda_2\in\mathbf{R}$, X, Y_1, $Y_2\in C^\infty(TM)$;

(3) $\nabla_X(fY)=(\nabla_Xf)Y+f\nabla_XY$ (导性), $f\in C^\infty(TM)$, X, $Y\in C^\infty(TM)$.

曲率张量 $R: C^\infty(TM)\times C^\infty(TM)\times C^\infty(TM)\to C^\infty(TM)$ 为

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z=-R(Y,X)Z.$$

再定义 ∇ 的挠张量 $T: C^\infty(TM)\times C^\infty(TM)\to C^\infty(TM)$ 为

$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]=-T(Y,X).$$

设 $p\in M$, U 为 p 的开邻域, $X_1,\cdots,X_n$ 为 U 上的 C^∞ 基向量场,则对任何 $X\in C^\infty(TU)$,有

$$X=\sum_{i=1}^{n} f^i X_i, \quad f^i \in C^\infty(U, \mathbf{R}).$$

在 U 上由公式

$$\nabla_{X_i} X_j=\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{i\ j}^{\ k} X_k,$$

$$T(X_i, X_j)=\sum_{k=1}^{n} T_{i\ j}^{\ k} X_k,$$

$$R(X_i, X_j) X_l=\sum_{k=1}^{n} R_{l\ i j}^{\ k} X_k$$

定义了 $\Gamma_{i\ j}^{\ k}$，$T_{i\ j}^{\ k}$, $R_{l\ i j}^{\ k} \in C^\infty(U, R)$如果令

$$[X_j, X_k]=\sum_{i=1}^{n} c_{j k}^{\ i} X_i, \quad c_{j k}^{\ i} \in C^\infty(U, R).$$

则有

引理 2 (1) $T_{j k}^{\ i}=-T_{k j}^{\ i}, \quad R_{l\ i j}^{\ k}=-R_{l\ j i}^{\ k}$;

(2) $T_{j k}^{\ i}=\Gamma_{j k}^{\ i}-\Gamma_{k j}^{\ i}-c_{j k}^{\ i}$;

(3) $$R_{l\ i j}^{\ k}=\sum_{s=1}^{n}(\Gamma_{j l}^{\ s} \Gamma_{i s}^{\ k}-\Gamma_{i l}^{\ s} \Gamma_{j s}^{\ k})+X_i \Gamma_{j l}^{\ k}-X_j \Gamma_{i l}^{\ k}$$

$$-\sum_{s=1}^{n} c_{i j}^{\ s} \Gamma_{s l}^{\ k}.$$

特别地，如果 U 为局部坐标邻域，$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i=1, \cdots, n$ 为坐标基向量场，则$\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right]=0$, $c_{jk}^{i}=0$, 且上述公式就成为

$$T_{jk}^{i}=\Gamma_{jk}^{i}-\Gamma_{kj}^{i},$$

$$R_{l i j}^{k}=\sum_{s=1}^{n}\left(\Gamma_{jl}^{s} \Gamma_{is}^{k}-\Gamma_{il}^{s} \Gamma_{js}^{k}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jl}^{k}-\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{il}^{k}.$$

证明 (1) 由$\sum_{i=1}^{n} T^i_{jk} X_i = T(X_j, X_k) = -T(X_k, X_j) = -\sum_{i=1}^{n} T^i_{kj} X_i$和$\sum_{k=1}^{n} R^k_{lij} X_k = R(X_i, X_j) X_l = -R(X_j, X_i) X_l = -\sum_{k=1}^{n} R^k_{lji} X_k$ 推出 $T^i_{jk} = -T^i_{kj}$ 和 $R^k_{lij} = -R^k_{lji}$.

(2) 由 $\sum_{i=1}^{n} T^i_{jk} X_i = T(X_j, X_k) = \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j - [X_j, X_k]$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} - c^i_{jk}) X_i,$$

推出

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} - c^i_{jk}.$$

(3) 由

$$\sum_{k=1}^{n} R^k_{lij} X_k = R(X_i, X_j) X_l$$

$$= \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_l - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_l - \nabla_{[X_i, X_j]} X_l$$

$$= \nabla_{X_i} \left(\sum_{s=1}^{n} \Gamma^s_{jl} X_s \right) - \nabla_{X_j} \left(\sum_{s=1}^{n} \Gamma^s_{il} X_s \right) - \nabla_{\sum_{s=1}^{n} c^s_{ij} x_s} X_l$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \Gamma^s_{jl} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{is} X_k + \sum_{s=1}^{n} (X_i \Gamma^s_{jl}) X_s - \sum_{s=1}^{n} \Gamma^s_{il} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{js} X_k$$

$$- \sum_{s=1}^{n} (X_j \Gamma^s_{il}) X_s - \sum_{s=1}^{n} c^s_{ij} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{sl} X_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{s=1}^{n} (\Gamma^s_{jl} \Gamma^k_{is} - \Gamma^s_{il} \Gamma^k_{js}) + X_i \Gamma^k_{jl} - X_j \Gamma^k_{il} \right.$$

$$-\sum_{s=1}^{n} c_{ij}^{s}\Gamma_{sl}^{k}\Big\}X_k$$

推出所要的公式. #

定理 1 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为 p 的开邻域 U 上的 C^∞ 基向量场, $\omega_i, \omega_{ij}(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 为 U 上的 C^∞ 1 形式, 它们由 $\omega_i(X_j)=\delta_j^i$, $\omega_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ki}^{j}\omega^k$ 定义(ω_{ij}由 U 上的 Γ_{ki}^{j} 因而由联络 ∇ 确定). 更进一步, ω_{ij} 由曲率张量表示: Cartan 结构方程

(1) $$d\omega_i=\sum_{s=1}^{n}\omega_s\wedge\omega_{si}+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}T_{jk}^{i}\omega_j\wedge\omega_k;$$

(2) $$d\omega_{li}=\sum_{s=1}^{n}\omega_{ls}\wedge\omega_{si}+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}R_{ljk}^{i}\omega_j\wedge\omega_k.$$

证明(1) 由 $$\left(\sum_{s=1}^{n}\omega_s\wedge\omega_{si}+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}T_{jk}^{i}\omega_j\wedge\omega_k\right)(X_l, X_h)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\{\omega_s(X_l)\omega_{si}(X_h)-\omega_s(X_h)\omega_{si}(X_l)\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}T_{jk}^{i}\{\omega_j(X_l)\omega_k(X_h)-\omega_j(X_h)\omega_k(X_l)\}$$

$$=\sum_{s,k=1}^{n}(\Gamma_{ks}^{i}\delta_h^k\delta_l^s-\Gamma_{ks}^{i}\delta_l^k\delta_h^s)+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}T_{jk}^{i}(\delta_l^j\delta_h^k-\delta_h^j\delta_l^k)$$

$$=\Gamma_{hl}^{i}-\Gamma_{lh}^{i}+\frac{1}{2}(T_{lh}^{i}-T_{\ h}^{i})=\Gamma_{hl}^{i}-\Gamma_{lh}^{i}+\Gamma_{lh}^{i}-\Gamma_{hl}^{i}-c_{lh}^{i}$$

$$=X_l(\omega_i(X_h))-X_h(\omega_i(X_l))-\omega_i([X_l, X_h])$$

$$=d\omega_i(X_l, X_h)$$

推出第一个等式.

(2) 再由$\left(\sum_{s=1}^{n}\omega_{ls}\wedge\omega_{si}+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}R_{ljk}^{i}\omega_j\wedge\omega_k\right)(X_m, X_h)$

$$=\sum_{s=1}^{n}\{\omega_{ls}(X_m)\omega_{si}(X_h)-\omega_{ls}(X_h)\omega_{si}(X_m)\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}R_{ljk}^{i}\{\omega_j(X_m)\omega_k(X_h)-\omega_j(X_h)\omega_k(X_m)\}$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ks}^{i}\delta_m^k\sum_{t=1}^{n}\Gamma_{tl}^{s}\delta_h^t-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ks}^{i}\delta_h^k\sum_{t=1}^{n}\Gamma_{tl}^{s}\delta_m^t\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}R_{ljk}^{i}(\delta_m^j\delta_h^k-\delta_h^j\delta_m^k)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\Gamma_{hs}^{i}\Gamma_{ml}^{s}-\sum_{s=1}^{n}\Gamma_{ms}^{i}\Gamma_{hl}^{s}+R_{lmh}^{i}=X_m\Gamma_{hl}^{i}-X_h\Gamma_{ml}^{i}$$

$$-\sum_{s=1}^{n}c_{mh}^{s}\Gamma_{sl}^{i}$$

$$=X_m\Gamma_{hl}^{i}-X_h\Gamma_{ml}^{i}-\sum_{k,s=1}^{n}\Gamma_{kl}^{i}c_{mh}^{s}\delta_s^k$$

$$=X_m\left(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{kl}^{i}\delta_h^k\right)-X_h\left(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{kl}^{i}\delta_m^k\right)$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{kl}^{i}\omega_k\right)\left(\sum_{s=1}^{n}c_{mh}^{s}X_s\right)$$

$$=X_m(\omega_{li}(X_h))-X_h(\omega_{li}(X_m))-\omega_{li}([X_m, X_h])$$

$$=d\omega_{li}(X_m, X_h)$$

推出第二个等式. #

细心的读者自然会问$\nabla_X Y$只对 X, $Y\in C^\infty(TM)$有定义，而$\nabla_{X_i}X_j$对 $X_i, X_j\in C^\infty(TU)$是没有定义的. 但有下面的引理

引理 3 设∇为C^∞向量丛$\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}\}$上的线性联络，$M$为$n$维$C^\infty$流形，$U\subset M$为开子流形，$X\in C^\infty(TM)$，$\omega\in C^\infty(E)$. 如果$X|_U=0$或$\omega|_U=0$，则$(\nabla_X\omega)|_U=0$.

证明 (1) 设$X|_U=0$, $p\in U$. 由第一章§3引理1，可以构造$f\in C^\infty(M, R)$，使得$f(p)=0$和$f|_{M-U}=1$，则$fX=X$，且

$$(\nabla_X\omega)_p=(\nabla_{fX}\omega)_p=(f\nabla_X\omega)_p=f(p)(\nabla_X\omega)_p=0.$$

(2) 同理，当$\omega|_U=0$时，由$f\omega=\omega$得到

$$(\nabla_X\omega)_p=(\nabla_X f\omega)_p=((Xf)\omega+f\nabla_X\omega)_p=(Xf)_p\omega_p$$
$$+f(p)(\nabla_X\omega)_p=0+0=0. \qquad \#$$

定理 2 设M为n维C^∞流形，$\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m, R), R^m, \mathscr{E}\}$为$M$上的$C^\infty$向量丛

(1) 如果∇为ξ上的线性联络，$\xi_U=\{E_U, U, \pi_U, \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}_U\}$为$\xi$在$U$上的限制(它是$U$上的$C^\infty$向量丛)，其中$E_U=E|_U$. 令

$$\nabla^U: C^\infty(TU)\times C^\infty(E_U)\to C^\infty(E_U),$$
$$(\overline{X}, \varpi)\mapsto\nabla^U_{\overline{X}}\varpi,$$

使得$(\nabla^U_{\overline{X}}\varpi)_p=(\nabla_X\omega)_p$，其中$p\in U$, $X\in C^\infty(TM)$, $\omega\in C^\infty(E)$，且存在p的开邻域$V\subset U$, $X|_V=\overline{X}|_V$, $\omega|_V=\varpi|_V$. 则∇^U为ξ_U上的线性联络.

(2) 反之，如果存在M上的开复盖$\{U_\alpha|\alpha\in\mu\}$和对每个$U_\alpha$有一个$\xi_{U_\alpha}$上的线性联络$\nabla^{U_\alpha}$，且$\nabla^{U_\alpha}|_{U_\alpha\cap U_\beta}=\nabla^{U_\beta}|_{U_\alpha\cap U_\beta}$. 令

$$\nabla: C^\infty(TM)\times C^\infty(E)\to C^\infty(E),$$
$$(X, \omega)\mapsto\nabla_X\omega,$$

使得$(\nabla_X\omega)_p=(\nabla^{U_\alpha}_{\overline{X}}\varpi)_p$，其中$p\in U_\alpha$, $\overline{X}$, ϖ分别为X, ω在U_α上的限制. 则∇为ξ上的线性联络，它在每个U_α上如(1)诱导出的线性联络恰为∇^{U_α}.

证明 (1) 由引理3，∇^U与X, ω的选取无关，因此，定义是

确切的．下面只证 ∇^U 满足线性联络的条件(2)，其它证明类似．设 $\bar{f}\in C^\infty(U, \boldsymbol{R})$，$\bar{X}\in C^\infty(TU)$，$\varpi\in C^\infty(E_U)$，$p\in U$．选 p 的开邻域 $V\subset U$ 和 $f\in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$，$X\in C^\infty(TM)$，$\omega\in C^\infty(E)$，使得 $f|_V=\bar{f}|_V$，$X|_V=\bar{X}|_V$，$\omega|_V=\varpi|_V$．于是，

$$(\nabla^U_{\bar{f}\bar{X}}\varpi)_p=(\nabla_{fX}\omega)_p=(f\nabla_X\omega)_p=f(p)(\nabla_X\omega)_p=\bar{f}(p)(\nabla^U_{\bar{X}}\varpi)_p$$

(2) 由题设，∇ 与 U_α 的选取无关．从 ∇^{U_α} 为线性联络，立即推出 ∇ 为 ξ 上的线性联络．#

注 2 设 ∇ 为 n 维 C^∞ 流形 M 上的线性联络，(U, φ)，$\{x^i\}$ 和 (V, ψ)，$\{y^\alpha\}$ 为 M 的局部坐标系．

$$\nabla^U_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1}$$

定义了 U 上的联络系数(Christoffel 函数)Γ^k_{ij}，而

$$\nabla^V_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\beta}=\sum_{\nu=1}^n \tilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

定义了 V 上的联络系数 $\tilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}$．应用联络的三个条件，当 $U\cap V\neq\varnothing$ 时，通过简单计算得到

$$\tilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta}=\sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^j}. \tag{2}$$

另一方面，如果已给 M 的一个局部坐标邻域的开复盖和在每个这样的局部坐标邻域 U 中的一组函数 Γ^k_{ij}，使得在任何两个相交的局部坐标邻域的交中，公式 (2) 成立．则由 (1) 可定义 $\nabla^U_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}$，因而在 U 中得到了一个线性联络 ∇^U．再由(2)得到，在 $U\cap V$ 中，$\nabla^U=\nabla^V$，所以它们唯一确定了 TM 上的一个线性联络．

用定义 1 定义线性联络是不变观点或算子观点，也就是近代

观点的方法．而用局部坐标邻域的开复盖，公式(1)、(2)定义线性联络是坐标观点，也就是古典观点的方法．

在不致混淆的情形下，仍记 ∇^U 为 ∇.

引理 4　设 $\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}\}$ 为 n 维 C^∞ 流形 M 上的 C^∞ 向量丛，∇ 为 ξ 上的线性联络．$X\in C^\infty(TM)$, $\omega\in C^\infty(E)$, $p\in M$, $X_p=0$. 则 $(\nabla_X\omega)_p=0$.

证明　设 (U,φ)，$\{x^i\}$ 为 p 的局部坐标系，令 $X=\sum\limits_{i=1}^n f^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $f^i\in C^\infty(U,\boldsymbol{R})$,　$f^i(p)=0(1\leqslant i\leqslant n)$.　选取 $X_i\in C^\infty(TM)$, $g^i\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，使得 $X_i|_V=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_V$，$g^i|_V=f^i|_V$，其中 V 为 p 的开邻域，则由引理 3 得到 $(\nabla_X\omega)_p=(\nabla_{\sum\limits_{i=1}^n g^iX_i}\omega)_p=\sum\limits_{i=1}^n g^i(p)\,(\nabla_{X_i}\omega)_p$

$=\sum\limits_{i=1}^n f^i(p)(\nabla_{X_i}\omega)_p=\sum\limits_{i=1}^n 0\cdot(\nabla_{X_i}\omega)_p=0.$　　#

引理 5　设 $\xi=\{E, M, \pi, \mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R}), \boldsymbol{R}^m, \mathscr{E}\}$ 为 n 维 C^∞ 流形 M 上的 C^∞ 向量丛，∇ 为 ξ 上的线性联络．$X\in C^\infty(TM)$, $\omega\in C^\infty(E)$, $p\in M$, σ 为 C^∞ 曲线，$\sigma(a)=p$，$\sigma'(a)=X_p$，则 $(\nabla_X\omega)_p$ 由 X_p 和 $\omega(\sigma(t))$ 完全确定，且它与切于 X_p 的 σ 的选取无关．

证明　取 p 的局部坐标系 (U,φ), $\{x^i\}$，相应于 ξ 的丛图卡为 $(\pi^{-1}(U),\psi)$. 设

$$X=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad \omega=\sum_{j=1}^m b^jX_j,$$

其中 $X_j=\psi^{-1}(x,e_j)$. 则

$$(\nabla_X\omega)_p=\left(\nabla_{\sum\limits_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}}\sum_{j=1}^m b^jX_j\right)_p$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left\{(X_p b^j)X_{jp}+b^j(p)\sum_{i=1}^{n}a^i(p)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X_j)_p\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{db^j(\sigma(t))}{dt}\bigg|_{t=0}X_{jp}\right.$$

$$\left.+b^j(p)\sum_{i=1}^{n}a^i(p)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X_j)_p\right\},$$

由 X_p 和 $\omega(\sigma(t))$完全确定，且与切于 X_p 的 σ 的选取无关($X_p b^i$ 与切于 X_p 的 σ 无关!). #

定义 3 设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,R),R^m,\mathscr{E}\}$ 为 n 维 C^∞ 流形 M 上的 C^∞ 向量从，∇ 为 ξ 上的线性联络. σ 为M中的 C^∞ 曲线，$T(t)=\sigma'(t)$，$\omega(t)\in E_{\sigma(t)}$，且 $\omega(t)$关于 t 是C^∞类的. 在局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$和从图卡$(\pi^{-1}(U),\psi)$中，设

$$T(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)},\quad \omega(t)=\sum_{j=1}^{m}b^j(t)X_{j\sigma(t)},\text{则定义}$$

$$(\nabla_T\omega)(t)=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{db^j}{dt}(X_{j\sigma(t)})+b^j(t)\sum_{i=1}^{n}a^i(t)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X_j)_{\sigma(t)}\right\},$$

容易验证它与局部坐标系的选取无关，注意其中 $X_j=\psi^{-1}(x,e_j)$.

如果 $\nabla_T\omega=0$，则称 $\omega(t)$是**沿σ平行的**.

如果 ξ 为M的切从且$\nabla_T T=0$，则称 σ 为一条**测地线**. 如果一条测地线不是任何测地线的真限制，则称它为**最大的测地线**.

定理 3 设∇为 n 维 C^∞ 流形 M 的切从TM上的线性联络. $\sigma:[a,b]\to M$ 为 C^∞ 曲线，$T=\sigma'$，则对任何 $Y\in T_{\sigma(a)}M$，存在 σ 上的唯一的一个 $Y(t)\in T_{\sigma(t)}M$，使得$Y(a)=Y$，$Y(t)$关于 t 是 C^∞ 类的，且 $Y(t)$沿 σ 是平行的.

证明 在 $\sigma(a)$的局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$中，设

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x^k},\qquad x^i(t)=x^i(\sigma(t)),$$

$$T(t)=\sigma'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)},\ Y(t)=\sum_{i=1}^{n}Y^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)},$$

则

$Y(t)$ 沿 σ 平行

$$\Leftrightarrow 0=\nabla_T Y=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{dY^j}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)}+Y^j\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{dt}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{dY^k}{dt}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^i}{dt}Y^j\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\sigma(t)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{dY^k}{dt}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^i}{dt}Y^j=0,\ k=1,\cdots,n.\ \text{(向量的平移方程)}$$

因为初始条件 $Y(a)=Y$ 确定了 n 个初始值 $Y^i(a)$，由线性常微分方程组解的存在和唯一性定理，以及利用延拓的方法可以得到沿 σ 平行的唯一的 C^∞ 向量场 $Y(t)$. #

注 3 对于一般的 C^∞ 向量丛 ξ，$\omega\in E_{\sigma(a)}$，类似地存在 σ 上的唯一的一个 $\omega(t)\in E_{\sigma(t)}$，使得 $\omega(a)=\omega$，$\omega(t)$ 关于 t 是 C^∞ 的，且 $\omega(t)$ 沿 σ 是平行的.

推论 1 在局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$ 中，

σ 为测地线

$$\Leftrightarrow 0=\nabla_T T=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{d^2x^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^{k}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\sigma(t)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{d^2x^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0,\quad k=1,\cdots,n.\ \text{(测地线方程)}$$

定理 4 设∇为n维C^∞流形M的切丛TM上的线性联络. $p\in M$, $X\in T_pM$. 则在M中存在一条唯一的最大测地线$\sigma(t)$, 使得$\sigma(0)=p,\sigma'(0)=X$.

证明 设$(U,\ \varphi)$, $\{x^i\}$ 为 p 的局部坐标系, 使得$\varphi(U)=\{(x^1,\cdots,x^n)\,|\,|x^i|<c\}$和$\varphi(p)=0$. 则 X 可表示为

$$X=\sum_{i=1}^{n}a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,\qquad a^i\in\boldsymbol{R}.$$

我们考察常微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{dx^i}{dt}=z^i\ (1\leqslant i\leqslant n)\\[2ex] \dfrac{dz^k}{dt}=-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^k(x^1,\cdots,x^n)z^iz^j\ (1\leqslant k\leqslant n)\\[2ex] (x^1,\cdots,x^n;z^1,\cdots,z^n)_{t=0}=(0,\cdots,0;a^1,\cdots,a^n).\end{cases}$$

设c_1,K 满足 $0<c_1<c$, $0<K<+\infty$, 使得上述方程组的右边在$\{(x^1,\cdots,x^n;z^1,\cdots,z^n)\,|\,|x^i|<c_1,\ \ |z^i|<K,i=1,\cdots,n\}$中满足 Lipschitz 条件. 从常微分方程组解的存在性和唯一性定理得到: 存在常数 $b_1>0$ 和C^∞函数 $x^i(t),z^i(t),1\leqslant i\leqslant n,|t|<b_1$ 使得

(1) $\dfrac{dx^i(t)}{dt}=z^i(t)\quad(1\leqslant i\leqslant n,|t|<b_1)$;

$$\frac{dz^k(t)}{dt}=-\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^k(x^1(t),\cdots,x^n(t))z^i(t)z^j(t)$$
$$(1\leqslant k\leqslant n,|t|<b_1);$$

(2) $(x^1(0),\cdots,x^n(0);z^1(0),\cdots,z^n(0))=(0,\cdots,0;a^1,\cdots,a^n)$;

(3) $|x^i(t)|<c_1,|z^i(t)|<K\quad(1\leqslant i\leqslant n,|t|<b_1)$;

(4) $x^i(t),z^i(t)\quad(1\leqslant i\leqslant n)$为满足条件(1), (2)和(3)的唯一函数组.

这就证明了存在一条满足条件 $\sigma(0)=p$, $\sigma'(0)=X$ 的 M中

的测地线 $\sigma(t)$. 此外，任何两条这样的测地线在 $t=0$ 的某个区间内是重合的. 从(4)可以得到，如果两条测地线 $\sigma_1(t)(t\in I_1)$和 $\sigma_2(t)(t\in I_2)$在某个开区间上重合，则它们在 $I_1\cap I_2$ 上也重合. 于是，立即得到定理 4 的结论. #

定理 5 设∇为 n 维 C^∞ 流形M 的切丛 TM 上的线性联络. 则

$\bar{\nabla}=C+\nabla$(即 $\bar{\nabla}_X Y=C(X,Y)+\nabla_X Y$)为 TM 上的线性联络$\Leftrightarrow$ $C=\bar{\nabla}-\nabla$ 为M上的 C^∞ 的 2 阶协变向量值张量场(称为 $\bar{\nabla}$ 和 ∇ 的差张量).

证明 ($\Rightarrow$) 因为 $\bar{\nabla}$ 和 ∇ 为 TM 上的线性联络，故 $C(X,fY)=\bar{\nabla}_X(fY)-\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\bar{\nabla}_X Y-(Xf)Y-f\nabla_X Y=f(\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y)=fC(X,Y)$，故 C 关于 Y 是 $C^\infty(M,\mathbf{R})$线性的. C关于 X 为$C^\infty(M,\mathbf{R})$线性是显然的.

($\Leftarrow$) 因为∇为 TM 上的线性联络，C 为M上的 C^∞ 的 2 阶协变向量值张量场，故

$\bar{\nabla}_X(fY)=C(X, fY)+\nabla_X(fY)=fC(X,Y)+f\nabla_X Y+(Xf)Y$
$=(Xf)Y+f\bar{\nabla}_X Y.$

即 $\bar{\nabla}$ 满足线性联络的条件(3)，至于条件(1)(2)是明显的. 这就证明了 $\bar{\nabla}$ 也为 TM 上的线性联络. #

定理 6 设 $\bar{\nabla}$ 和∇ 为 n 维 C^∞ 流形M 的切丛 TM 上的线性联络，$C=\bar{\nabla}-\nabla$ 为差张量. 令

$$S(X,Y)=\frac{1}{2}[C(X,Y)+C(Y,X)](\text{对称}),$$

$$A(X,Y)=\frac{1}{2}[C(X,Y)-C(Y,X)](\text{反称}).$$

则 (1) $2A(X,Y)=\bar{T}(X, Y)-T(X,Y)$，其中 $\bar{T},T$ 分别为 $\bar{\nabla},\nabla$ 的挠张量;

(2) (a) 联络 $\bar{\nabla}$ 和 ∇ 有相同的测地线(参数相同)$\Leftrightarrow(b)$ 对所有的 $X, C(X,X)=0 \Leftrightarrow (c) S=0 \Leftrightarrow (d) C=A$;

(3) $\bar{\nabla}=\nabla \Leftrightarrow \bar{T}=T$ 且它们有相同的测地线.

证明 (1) $\bar{T}(X, Y)-T(X, Y)=\bar{\nabla}_X Y-\bar{\nabla}_Y X-[X, Y]-\nabla_X Y+\nabla_Y X+[X,Y]=(\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y)-(\bar{\nabla}_Y X-\nabla_Y X)=C(X, Y)-C(Y,X)=2A(X,Y)$.

(2) $(a)\Rightarrow(b)$ 设 σ 为切于 X_p 的测地线, $\sigma'(0)=X_p$, $X\in C^\infty(TM)$, 且 $X|_\sigma=\sigma'$. 则

$C(X_p, X_p)=C(\sigma'(0),\sigma'(0))=C(X,X)|_p=(\bar{\nabla}_X X-\nabla_X X)_p=(\bar{\nabla}_{\sigma'}\sigma'-\nabla_{\sigma'}\sigma')|_0=0-0=0$.

$(a)\Leftarrow(b)$ 因为对所有 $X, C(X,X)=0$, 故

$$\bar{\nabla}_{\sigma'}\sigma'-\nabla_{\sigma'}\sigma'=C(\sigma',\sigma')=0,$$
$$\bar{\nabla}_{\sigma'}\sigma'=\nabla_{\sigma'}\sigma',$$
$$\bar{\nabla}_{\sigma'}\sigma'=0\Leftrightarrow\nabla_{\sigma'}\sigma'=0,$$

即 $\bar{\nabla}$ 和 ∇ 有相同的测地线.

$(b)\Rightarrow(c)$ 由 (b) $C(X,X)=0$ 得到

$$S(X,X)=\frac{1}{2}[C(X,X)+C(X,X)]=0.$$

于是, 对所有的 X, Y 有

$0=S(X+Y, X+Y)=S(X, X)+S(X, Y)+S(Y, X)+S(Y,Y)=2S(X,Y)$,

$S(X,Y)=0$, 即 $S=0$.

$(b)\Leftarrow(c)$ 因为 $S=0$, 故 $C(X,X)=\frac{1}{2}[C(X,X)+C(X,X)]=S(X,X)=0$.

$(c)\Leftrightarrow(d)$ 因为 $C(X,Y)+C(Y,X)=2S(X,Y)$, 所以 $S(X,Y)=0\Leftrightarrow C(X,Y)=-C(Y,X)\Leftrightarrow C(X,Y)=\frac{1}{2}[C(X,Y)-C(Y,

$X)]=A(X,Y)$，即$C=A$.

(3) ($\Rightarrow$)显然.

($\Leftarrow$)因为$\bar{T}=T\Leftrightarrow\bar{\nabla}_XY-\bar{\nabla}_YX-[X,Y]=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]\Leftrightarrow C(X,Y)=\bar{\nabla}_XY-\nabla_XY=\bar{\nabla}_YX-\nabla_YX=C(Y,X)$,

$\bar{\nabla}$和∇有相同的测地线$\Leftrightarrow S=0\Leftrightarrow C(X,Y)=-C(Y,X)$,

故$0=C(X,Y)=\bar{\nabla}_XY-\nabla_XY$，即$\bar{\nabla}=\nabla$. #

定理 7 设∇为C^∞流形M的切丛TM上的线性联络，则存在唯一的线性联络$\bar{\nabla}$($\bar{\nabla}_XY=\nabla_XY-\frac{1}{2}T(X,Y)$)，它和$\nabla$有相同的测地线(参数相同)，且挠张量$\bar{T}=0$.

证明 因为∇为TM上的线性联络和$-\frac{1}{2}T(X,Y)$为M上的C^∞的2阶协变向量值张量场，根据定理5，$\bar{\nabla}=\nabla-\frac{1}{2}T$也为$TM$上的线性联络. 由$C(X,X)=-\frac{1}{2}T(X,X)=0$知$\bar{\nabla}$和$\nabla$有相同的测地线(参数相同). 此外，$\bar{T}(X,Y)=\bar{\nabla}_XY-\bar{\nabla}_YX-[X,Y]=\nabla_XY-\frac{1}{2}T(X,Y)-\nabla_YX+\frac{1}{2}T(Y,X)-[X,Y]=(\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y])-T(X,Y)=T(X,Y)-T(X,Y)=0$，即$\bar{T}=0$.

由定理6(3)，如果TM上有两个线性联络$\bar{\nabla}_1$和$\bar{\nabla}_2$，它们都与∇有相同的测地线(参数相同)且挠张量$\bar{T}_1=\bar{T}_2=0$，则$\bar{\nabla}_1=\bar{\nabla}_2$，这就证明了唯一性. #

注 4 定理5、6、7给出了从已知联络∇构造所需的新的联络$\bar{\nabla}$.

但是，必须指出的是∇不是2阶协变向量值张量场. 如选$f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$, X, $Y\in C^\infty TM$，使$(Xf)Y\neq0$，则$\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\nabla_XY\neq f\nabla_XY$.

注5 对于C^∞紧致定向流形M上的C^∞向量丛E上的联络∇可

以定义它的能量或 Yang-Mills 泛函 YM(∇). YM的临界点称为 Yang-Mills 场. 关于 Yang-Mills 场可参阅 [Freed, D. S. and Uhlenbeck, K. K.] 和 [Lawson, H. B.].

§3 Levi-Civita 联络

设∇为n维C^∞流形M的切丛TM上的线性联络. §2 例4构造了余切丛T^*M上的线性联络, 而例5构造了切丛TM的张量丛$\otimes^{r,s}TM$上的线性联络. 为方便, 将这联络仍记为∇. 现在我们用另一方式加以叙述. 令

$$\nabla: C^\infty(TM)\times C^\infty(\otimes^{r,s}TM)\to C^\infty(\otimes^{r,s}TM),$$

$$(X,\theta)\mapsto\nabla(X,\theta)=\nabla_X\theta.$$

(1) $\nabla_X f=Xf,\quad f\in C^\infty(M,\mathbf{R})=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$;

(2) $\nabla_X Y$由TM上的线性联络∇给出, $Y\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$;

(3) $(\nabla_X\theta)(Y)=X\theta(Y)-\theta(\nabla_X Y)$, $\theta\in C^\infty(T^*M)=C^\infty(\otimes^{0,1}TM)$, $Y\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$;

(4) $(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)=\nabla_X(\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s))-\sum_{i=1}^{r}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_X W_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$

$$-\sum_{j=1}^{s}\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},\nabla_X Y_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s),$$

$\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, $W_i\in C^\infty(T^*M)=C^\infty(\otimes^{0,1}TM)$, $Y_j\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$.

为得到∇的性质, 我们先定义收缩映射.

定义1 设$\{e_k\}$为n维实向量空间V的基, $\{e^k\}$为其对偶基, V^*为V的对偶空间. 定义**收缩映射**

$$C^i_j:\otimes^{r,s}V\to\otimes^{r-1,s-1}V,$$

使得对任何$W_i \in V^*$, $i=1,\cdots,r-1$, $Y_j \in V$, $j=1,\cdots,s-1$,

$$(C_j^i\theta)(W_1,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{s-1})=\sum_{k=1}^{n}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_k,Y_j,\cdots,Y_{s-1}).$$

引理1 C_j^i与$\{e_k\}$, $\{e^k\}$的选取无关.

证明 设$\{\bar{e}_k\}$, $\{\bar{e}^k\}$为另一组对偶基, 且$\bar{e}_h=\sum_{t=1}^{n}c_h^t e_t$, $\bar{e}^h=\sum_{k=1}^{n}d_k^h e^k$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{n}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\bar{e}^h,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},\bar{e}_h,Y_j,\cdots,Y_{s-1})\\
&=\sum_{h=1}^{n}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\sum_{k=1}^{n}d_k^h e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},\sum_{t=1}^{n}c_h^t e_t,Y_j,\cdots,Y_{s-1})\\
&=\sum_{k,t=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{n}c_h^t d_k^h\right)\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_t,Y_j,\cdots,Y_{s-1})\\
&=\sum_{k,t=1}^{n}\delta_k^t\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_t,Y_j,\cdots,Y_{s-1})\\
&=\sum_{k=1}^{n}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},e^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_k,Y_j,\cdots,Y_{s-1}).
\end{aligned}$$

#

注1 可以证明

$$C^i_j(X_1\otimes\cdots\otimes X_r\otimes W_1\otimes\cdots\otimes W_s)$$
$$=W_j(X_i)X_1\otimes\cdots\otimes\hat{X}_i\otimes\cdots\otimes X_r\otimes W_1\otimes\cdots\otimes\hat{W}_j\otimes\cdots\otimes W_s,$$
这公式也可作为 C^i_j 的定义.

此外，关于 $C^i_j\theta$ 的分量有

$$(C^i_j\theta)^{l_1\cdots l_{r-1}}_{m_1\cdots m_{s-1}}=(C^i_j\theta)(e^{l},\cdots,e^{l_{r-1}};e_{m_1},\cdots,e_{m_{s-1}})$$
$$=\sum_{k=1}^n\theta(e^{l_1},\cdots,e^{l_{i-1}},e^k,e^{l_i},\cdots,e^{l_{r-1}};\ e_{m_1},\cdots,e_{m_{j-1}},e_k,$$
$$e_{m_j},\cdots,e_{m_{s-1}})$$
$$=\sum_{k=1}^n\theta^{l_1\cdots l_{i-1}kl_i\cdots l_{r-1}}_{m_1\cdots m_{j-1}km_j\cdots m_{s-1}}.$$

引理2 (1) $\nabla_Xf\in C^\infty(M,R)=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$, $\nabla_XY\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$, $\nabla_X\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, 其中 $f\in C^\infty(M,R)$, $X,Y\in C^\infty(TM)$, $\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$;

(2) ∇ 为 $\otimes^{r,s}TM$ 上的线性联络;

(3) $\nabla_X:C^\infty(\wedge^rT^*M)\longrightarrow C^\infty(\wedge^rT^*M)$, 其中 $C^\infty(\wedge^rT^*M)$ 为 TM 上的 r 阶 C^∞ 外形式的全体;

(4) $\nabla_X(\theta+\eta)=\nabla_X\theta+\nabla_X\eta$, $\theta,\eta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$;

(5) $\nabla_X(\theta\otimes\eta)=(\nabla_X\theta)\otimes\eta+\theta\otimes\nabla_X\eta$, $\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, $\eta\in C^\infty(\otimes^{h,t}TM)$
(导性);

(6) $\nabla_X(\alpha\wedge\beta)=(\nabla_X\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(\nabla_X\beta)$, $\alpha\in C^\infty(\wedge^rT^*M)$, $\beta\in C^\infty(\wedge^sT^*M)$;

(7) $\nabla_X\circ C^i_j=C^i_j\circ\nabla_X$.

证明 (1) $\nabla_Xf\in C^\infty(M,R)=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$, $\nabla_XY\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$ 是显然的. 因为对任何 $f\in C^\infty(M,R)$ 有

$(\nabla_X\theta)(fY)=X\theta(fY)-\theta(\nabla_X(fY))=(Xf)\theta(Y)+fX\theta(Y)-\theta((Xf)Y+f\nabla_XY)=f(X\theta(Y)-\theta(\nabla_XY))=f(\nabla_X\theta)(Y)$,

$$(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$$
$$=\nabla_X(\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s))$$
$$-\sum_{l=1}^{i-1}\theta(W_1,\cdots,W_{l-1},\nabla_XW_l,W_{l+1},\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,$$
$$W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$$
$$-\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_X(fW_i),W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$$
$$-\sum_{l=i+1}^{r}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,W_{l-1},\nabla_XW_l,$$
$$W_{l+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$$
$$-\sum_{j=1}^{s}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},fW_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},\nabla_XY_j,$$
$$Y_{j+1},\cdots,Y_s)$$
$$=f(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)+(Xf)\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,$$
$$Y_s)-(Xf)\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$$
$$=f(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s).$$

类似可得到

$$(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},fY_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s)$$
$$=f(\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$$

关于加法的线性性是明显的，因此，$\nabla_X\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$.

(2) 由§2例4和∇为TM上的线性联络，下面可验证∇: $C^\infty(TM)\times C^\infty(\otimes^{r,s}TM)\to C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, $(X,\theta)\mapsto\nabla_X\theta(r,s\geqslant1)$为线性联络. 从定义，显然$\nabla_X\theta$关于$X$是$C^\infty(M,\mathbf{R})$线性的，关于$\theta$是$\mathbf{R}$线性的. 剩下须证的是对任何$f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，有

$$(\nabla_X(f\theta))(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$$
$$=\nabla_X(f\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s))$$
$$-\sum_{i=1}^{r}f\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_XW_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)$$

$$-\sum_{j=1}^{s} f\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1;\cdots,Y_{j-1},\nabla_X Y_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s).$$

$$=((Xf)\theta+f\nabla_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s),$$

即 $\nabla_X(f\theta)=(Xf)\theta+f\nabla_X\theta$。

(3) 由 $\theta\in C^\infty(\wedge^r T^*M)$ 的反称性和 $\nabla_X\theta$ 的定义立即有 $\nabla_X\theta\in C^\infty(\wedge^r T^*M)$.

(4) 由$\nabla_X\theta$ 的定义.

(5) 当 $r=0$ 或 $s=0$ 时,公式显然成立.

当 $r,s\geqslant 1$ 时,有

$$(\nabla_X(\theta\otimes\eta))(W_1,\cdots,W_r,\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;Y_1,\cdots,Y_s,\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$=\nabla_X(\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\cdot\eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t))$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_X W_i,W_{i+1},\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\cdot$$

$$\eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{j-1},\nabla_X Y_j,Y_{j+1},\cdots,Y_s)\cdot$$

$$\eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$-\sum_{k=1}^{h}\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s)\cdot\eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_{k-1},\nabla_X\overline{W}_k,$$

$$\overline{W}_{k+1},\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$-\sum_{l=1}^{t}\theta(W_1,\cdots,W_r;\ Y_1,\cdots,Y_s)\cdot\eta(\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_{l-1},$$

$$\nabla_X\overline{Y}_l,\overline{Y}_{l+1},\cdots,\overline{Y}_t)$$

$$=((\nabla_X\theta)\otimes\eta+\theta\otimes\nabla_X\eta)(W_1,\cdots,W_r,\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_h;Y_1,\cdots,Y_s,$$

$$\overline{Y}_1,\cdots,\overline{Y}_t),$$

即 $\nabla_X(\theta\otimes\eta)=(\nabla_X\theta)\otimes\eta+\theta\otimes\nabla_X\eta$.

(6) $\nabla_X(\alpha\wedge\beta)=\nabla_X\left(\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\alpha\otimes\beta)\right)$

$$=\nabla_X\left(\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi(\alpha\otimes\beta)^\pi\right)$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi\nabla_X(\alpha\otimes\beta)^\pi$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi(\nabla_X(\alpha\otimes\beta))^\pi$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi((\nabla_X\alpha)\otimes\beta+\alpha\otimes\nabla_X\beta)^\pi$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi((\nabla_X\alpha)\otimes\beta)^\pi+\frac{1}{r!s!}\sum_\pi(-1)^\pi(\alpha\otimes\nabla_X\beta)^\pi$$

$$=(\nabla_X\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(\nabla_X\beta).$$

(7) 设$\{e_k\}$为TM的局部C^∞基向量场，$\{e^k\}$为其对偶基向量场. 因为

$$(\nabla_Xe^k)(e_l)=Xe^k(e_l)-e^k(\nabla_Xe_l)$$

$$=X\delta^k_l-e^k(\nabla_{\sum\limits_m a^me_m}e_l)$$

$$=-e^k\left(\sum_m a^m\nabla_{e_m}e_l\right)=-e^k\left(\sum_{m,t}a^m\Gamma^t_{ml}e^t\right)$$

$$=-\sum_{m,t}a^m\Gamma^t_{ml}\delta^k_t=-\sum_m a^m\Gamma^k_{ml},$$

$$\nabla_Xe^k=-\sum_{m,l}a^m\Gamma^k_{ml}e^l.$$

又因 $\nabla_Xe_k=\nabla_{\sum\limits_m a^me_m}e_k=\sum\limits_{m,l}a^m\Gamma^l_{mk}e_l$，故

$$\sum_k\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\nabla_Xe^k,\ W_i,\ \cdots,\ W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},e_k,$$

$$Y_j, \cdots, Y_{s-1})$$

$$= -\sum_{k,m,l} a^m \Gamma_{ml}^k \theta(W_1, \cdots, W_{i-1}, e^l, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{j-1}, e_k,$$

$$Y_j, \cdots, Y_{s-1}),$$

$$\sum_k \theta(W_1, \cdots, W_{i-1}, e^k, W_i, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{j-1}, \nabla_X e_k,$$

$$Y_j, \cdots, Y_{s-1})$$

$$= \sum_{l,m,k} a^m \Gamma'_{mk} \theta(W_1, \cdots, W_{i-1}, e^k, W_i, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{j-1},$$

$$e_l, Y_j, \cdots, Y_{s-1}),$$

$$\sum_k [\theta(W_1, \cdots, W_{i-1}, \nabla_X e^k, W_i, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{j-1}, e_k,$$

$$Y_j, \cdots, Y_{s-1}) + \theta(W_1, \cdots, W_{i-1}, e^k, W_i, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots,$$

$$Y_{j-1}, \nabla_X e_k, Y_j, \cdots, Y_{s-1})]$$

$$= 0.$$

于是,

$$(C_j^i \circ \nabla_X \theta)(W_1, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{s-1})$$

$$= \sum_k (\nabla_X \theta)(W_1, \cdots, W_{i-1}, e^k, W_i, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{j-1}, e_k,$$

$$Y_j, \cdots, Y_{s-1})$$

$$= (\nabla_X \circ C_j^i \theta)(W_1, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{s-1})$$

$$+ \sum_k [\theta(W_1, \cdots, W_{i-1}, \nabla_X e^k, W_i, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{j-1}, e_k,$$

$$Y_j, \cdots, Y_{s-1})$$

$$+ \theta(W_1, \cdots, W_{i-1}, e^k, W_i, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{j-1}, \nabla_X e_k,$$

$$Y_j, \cdots, Y_{s-1})]$$

$$= (\nabla_X \circ C_j^i \theta)(W_1, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{s-1}) + 0$$

$$= (\nabla_X \circ C_j^i \theta)(W_1, \cdots, W_{r-1}; Y_1, \cdots, Y_{s-1}),$$

$C^i_j \circ \nabla_X = \nabla_X \circ C^i_j$. #

定义2 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为$n$维$C^\infty$Riemann流形，如果$TM$上的线性联络$\nabla$还满足:

（4）挠张量$T=0$, 即对任何$X,Y\in C^\infty(TM)$,

$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$;

（5）对任何$X,Y,Z\in C^\infty(TM)$,

$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle$.

则称∇为$(M, g)=(M, \langle, \rangle)$上的**Riemann联络**或**Levi-Civita联络**.

引理3 （1）n维C^∞流形M的切丛TM上的线性联络∇满足$T=0\Leftrightarrow$对任何局部坐标系$\{x^i\}$, 有$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$(称为**对称联络**);

（2）(a) n维C^∞流形M的切丛TM上的线性联络∇满足$Z\langle X, Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle$, $X, Y, Z\in C^\infty(TM)\Leftrightarrow(b)$ 对任何$Z\in C^\infty(TM)$, $\nabla_Z g=0$ 或 $\nabla g=0$(参阅§2和§6中的∇)$\Leftrightarrow(c)$ 对任何局部坐标系$\{x^i\}$, 有

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\sum_{l=1}^n g_{lj}\Gamma^l_{ki}+\sum_{l=1}^n g_{il}\Gamma^l_{kj},\quad i,j,k=1,\cdots,n$$

$\Leftrightarrow(d)$平行移动下保持内积不变.

证明 （1）对任何$X, Y\in C^\infty(TM)$, $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$ $\Leftrightarrow$对任何局部坐标系$\{x^i\}$,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}-\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=\sum_{k=1}^n(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}=0$$

$\Leftrightarrow\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$, $i,j,k=1,\cdots,n$.

（2）$(a)\Leftrightarrow(b)$对任何$X,Y,Z\in C^\infty(TM)$,

$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle$

$\Leftrightarrow(\nabla_Z g)(X,Y)=\nabla_Z(g(X,Y))-g(\nabla_Z X,Y)-g(X,\nabla_Z Y)=0$, 即$\nabla_Z g=0$ 或 $\nabla g=0$.

$(a)\Leftrightarrow(c)$ 对任何 $X,Y,Z\in C^{\infty}(TM)$,

$$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle$$

$\Leftrightarrow$对任何局部坐标系$\{x^i\}$,有

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\sum_{l=1}^{n}g_{lj}\Gamma_{ki}^{l}+\sum_{l=1}^{n}g_{il}\Gamma_{kj}^{l},\quad i,j,k=1,\cdots,n.$$

设 $X(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}a^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}b^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$为沿 C^{∞} 曲线 $\sigma(t)$的关于 t 的C^{∞}切向量场,$\sigma'(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$,其中$x^i(t)$为$\sigma(t)$的坐标. 如果$X(t)$和$Y(t)$沿 σ平行,则

$$\frac{da^i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_{jk}^{i}\frac{dx^j}{dt}a^k=0,$$

$$\frac{db^i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_{jk}^{i}\frac{dx^j}{dt}b^k=0.$$

于是,平行移动下保持内积不变,即$\langle X(t),Y(t)\rangle=$常数$\Leftrightarrow$

$$0=\frac{d}{dt}\langle X(t),Y(t)\rangle=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}a^ib^j\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{dg_{ij}}{dt}a^ib^j+\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\frac{da^i}{dt}b^j+\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}a^i\frac{db^j}{dt}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{dg_{ij}}{dt}a^ib^j-\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\left(\sum_{k,l=1}^{n}\Gamma_{kl}^{i}\frac{dx^k}{dt}a^l\right)b^j$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}a^i\left(\sum_{k,l=1}^{n}\Gamma_{kl}^{j}\frac{dx^k}{dt}b^l\right)$$

$$= \sum_{k,i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \sum_{l=1}^{n} g_{lj} \Gamma_{ki}^{l} - \sum_{l=1}^{n} g_{il} \Gamma_{kj}^{l} \right) \frac{dx^k}{dt} a^i b^j \qquad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^{n} g_{lj} \Gamma_{ki}^{l} + \sum_{l=1}^{n} g_{il} \Gamma_{kj}^{l}, \quad i, j, k = 1, \cdots, n.$$

上述等价性中,($\Leftarrow$)显然.

($\Rightarrow$)对任何固定点 $p \in M$, 选 σ 使 $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) =$

$$\left(\frac{dx^1}{dt}, \cdots, \frac{dx^n}{dt} \right) \Big|_{t=0} = (0, \cdots, 0, \overset{\overset{k}{\downarrow}}{1}, 0, \cdots, 0), \quad a(0) = (0, \cdots, 0, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}$$

$0, \cdots, 0)$, $b(0) = (0, \cdots, 0, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{1}, 0, \cdots, 0)$, 并代入(1)得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^{n} g_{lj} \Gamma_{ki}^{l} + \sum_{l=1}^{n} g_{il} \Gamma_{kj}^{l}, \quad i, j, k = 1, \cdots, n. \qquad \#$$

定理1 (Riemann流形基本定理) 在 n 维 C^∞ Riemann流形 $(M, g) = (M, \langle , \rangle)$ 上存在唯一的 Riemann联络.

证明1(不变观点)

(唯一性)设 ∇ 为 $(M, g) = (M, \langle , \rangle)$ 的Riemann联络, 则

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$
$$+ \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle$$
$$+ \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle,$$
$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle$$
$$- \langle X, [Y, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle \qquad (2)$$

因为(2)式对任何 $Z \in C^\infty(TM)$ 成立, 故它唯一确定了 $\nabla_X Y \in C^\infty(TM)$, 即 $(M, g) = (M, \langle , \rangle)$ 上若有Riemann联络一定是唯一的.

(存在性) 为了证明 Riemann 联络的存在性, 自然应从(2)式出发定义 $\nabla_X Y$(它在 M 上是整体的). 由 Z 的任意性, 通过(2)式作简单的计算可知 ∇ 满足线性联络的三个条件. 此外, 由

$$2\langle\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],Z\rangle=\{X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle\}-\{Y\langle X,Z\rangle+X\langle Z,Y\rangle-Z\langle Y,X\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle-\langle Z,[X,Y]\rangle\}-2\langle[X,Y],Z\rangle=0$$

和

$$2\langle\nabla_Z X,Y\rangle+2\langle\nabla_Z Y,X\rangle=\{Z\langle X,Y\rangle+X\langle Y,Z\rangle-Y\langle Z,X\rangle-\langle X,[Z,Y]\rangle-\langle Z,[X,Y]\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}+\{Z\langle Y,X\rangle+Y\langle X,Z\rangle-X\langle Z,Y\rangle-\langle Y,[Z,X]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}=2Z\langle X,Y\rangle$$

推出∇满足Riemann联络的条件(4)和(5).

证明2 (坐标观点)

设$\{x^i\}$和$\{y^i\}$为$p\in M$的局部坐标系, $g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$,

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k,\quad \tilde{g}_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right\rangle=\sum_{l,s=1}^n\frac{\partial x^l}{\partial y^i}\frac{\partial x^s}{\partial y^j}g_{ls},$$

$$\tilde{g}^{ij}=\sum_{l,s=1}^n\frac{\partial y^i}{\partial x^l}\frac{\partial y^j}{\partial x^s}g^{ls},\quad \sum_{j=1}^n\tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{jk}=\delta_i^k,\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^n\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\frac{\partial}{\partial y^j}=\sum_{k=1}^n\tilde{\Gamma}_{ij}^k\frac{\partial}{\partial y^k}.$$

(唯一性) $$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^n g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\sum_{r=1}^n g^{kr}\left(\sum_{l=1}^n g_{lj}\Gamma_{ri}^l+\sum_{l=1}^n g_{il}\Gamma_{rj}^l\right)\right.$$

$$+\sum_{r=1}^n g^{kr}\left(\sum_{l=1}^n g_{lj}\Gamma_{ir}^l+\sum_{l=1}^n g_{rl}\Gamma_{ij}^l\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{n} g^{kr}\left(\sum_{l=1}^{n} g_{li}\Gamma^{l}_{jr}+\sum_{l=1}^{n} g_{rl}\Gamma^{l}_{ji}\right)\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{2}(\Gamma^{k}_{ij}+\Gamma^{k}_{ji})=\Gamma^{k}_{ij},$$

这就证明了 Γ^{k}_{ij}，从而 Riemann 联络 ∇ 完全由 g_{ij} 及其偏导数确定，即由 Riemann 度量 g 确定.

(存在性)设 $\Gamma^{k}_{ij}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{n} g^{kr}\left(\dfrac{\partial g_{rj}}{\partial x^{i}}+\dfrac{\partial g_{ri}}{\partial x^{j}}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^{r}}\right)$,

$$\widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sum_{\delta=1}^{n}\tilde{g}^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{\delta\beta}}{\partial y^{\alpha}}+\frac{\partial\tilde{g}_{\delta\alpha}}{\partial y^{\beta}}-\frac{\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^{\delta}}\right),$$

则 $\Gamma^{k}_{ij}=\Gamma^{k}_{ji}$，$\widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}=\widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\beta\alpha}$，且通过计算得到

$$\widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{\alpha}}\frac{\partial x^{j}}{\partial y^{\beta}}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{k}}\Gamma^{k}_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{2}x^{j}}{\partial y^{\alpha}\partial y^{\beta}}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{j}},$$

$$\sum_{l=1}^{n} g_{lj}\Gamma^{l}_{ki}+\sum_{l=1}^{n} g_{il}\Gamma^{l}_{kj}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g_{lj}\sum_{s=1}^{n} g^{ls}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{s}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g_{il}\sum_{s=1}^{n} g^{ls}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^{s}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\delta^{s}_{j}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{s}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\delta^{s}_{i}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^{s}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{j}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^{i}}\right)$$

$$=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}.$$

于是，由 Γ^{k}_{ij} 确定的线性联络满足 Riemann 联络的五个条件.

证明3 参阅§6定理2. #

注2 对称联络不一定是Riemann联络. 例如, 如果∇为(M,g)上的Riemann联络, 则$T=0$. 令$\bar{\nabla}=\nabla+C$, 其中C为TM上的C^∞的2阶对称协变向量值张量场, 且$C\neq0$, 故$\bar{\nabla}\neq\nabla$. 但根据§2定理6, $A(X,Y)=\frac{1}{2}[C(X,Y)-C(Y,X)]=0$和$\bar{T}(X,Y)=T(X,Y)+2A(X,Y)=0+0=0$.

定义3 设∇为n维C^∞ Riemann流形$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$上的Riemann联络. 我们称$TM$上的(0, 4)型$C^\infty$张量场$K$为**Riemann-Christoffel曲率张量**, 其中K为:

$$K(X_1,X_2,X_3,X_4)$$
$$=\langle X_1,R(X_3,X_4)X_2\rangle,\quad X_1,X_2,X_3,X_4\in C^\infty(TM).$$

引理4 设$X_1,X_2,X_3,X_4\in C^\infty(TM)$, 则有

(1) $R(X_1,X_2)X_3+R(X_3,X_1)X_2+R(X_2,X_3)X_1=0$(Bianchi第一恒等式);

$$K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_1,X_3,X_4,X_2)+K(X_1,X_4,X_2,X_3)=0;$$

(2) $K(X_1,X_2,X_3,X_4)=-K(X_2,X_1,X_3,X_4)$;

(3) $K(X_1,X_2,X_3,X_4)=-K(X_1,X_2,X_4,X_3)$;

(4) $K(X_1,X_2,X_3,X_4)=K(X_3,X_4,X_1,X_2)$.

证明 (1) $R(X_1,X_2)X_3+R(X_3,X_1)X_2+R(X_2,X_3)X_1$

$$\begin{aligned}&=\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3-\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3-\nabla_{[X_1,X_2]}X_3+\nabla_{X_3}\nabla_{X_1}X_2\\&\quad-\nabla_{X_1}\nabla_{X_3}X_2-\nabla_{[X_3,X_1]}X_2+\nabla_{X_2}\nabla_{X_3}X_1-\nabla_{X_3}\nabla_{X_2}X_1\\&\quad-\nabla_{[X_2,X_3]}X_1=\nabla_{X_1}(\nabla_{X_2}X_3-\nabla_{X_3}X_2)\\&\quad-\nabla_{[X_2,X_3]}X_1+\nabla_{X_2}(\nabla_{X_3}X_1-\nabla_{X_1}X_3)-\nabla_{[X_3,X_1]}X_2\\&\quad+\nabla_{X_3}(\nabla_{X_1}X_2-\nabla_{X_2}X_1)-\nabla_{[X_1,X_2]}X_3\\&=\nabla_{X_1}[X_2,X_3]-\nabla_{[X_2,X_3]}X_1+\nabla_{X_2}([X_3,X_1])\end{aligned}$$

$$-\nabla_{[X_3,X_1]}X_2+\nabla_{X_3}[X_1,X_2]-\nabla_{[X_1,X_2]}X_3$$
$$=[X_1,[X_2,X_3]]+[X_2,[X_3,X_1]]$$
$$+[X_3,[X_1,X_2]]=0.$$

$$K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_1,X_3,X_4,X_2)$$
$$+K(X_1,X_4,X_2,X_3)=\langle X_1,R(X_3,X_4)X_2+R(X_4,X_2)X_3$$
$$+R(X_2,X_3)X_4\rangle=\langle X_1,0\rangle=0.$$

(2) $K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_2,X_1,X_3,X_4)$
$$=\langle X_1,R(X_3,X_4)X_2\rangle+\langle X_2,R(X_3,X_4)X_1\rangle$$
$$=\langle X_1,\nabla_{X_3}\nabla_{X_4}X_2-\nabla_{X_4}\nabla_{X_3}X_2-\nabla_{[X_3,X_4]}X_2\rangle$$
$$+\langle X_2,\nabla_{X_3}\nabla_{X_4}X_1-\nabla_{X_4}\nabla_{X_3}X_1-\nabla_{[X_3,X_4]}X_1\rangle$$
$$=\{\langle X_1,\nabla_{X_3}\nabla_{X_4}X_2\rangle+\langle X_2,\nabla_{X_3}\nabla_{X_4}X_1\rangle-\langle X_1,\nabla_{X_4}\nabla_{X_3}X_2\rangle$$
$$-\langle X_2,\nabla_{X_4}\nabla_{X_3}X_1\rangle\}-\{\langle X_1,\nabla_{[X_3,X_4]}X_2\rangle$$
$$+\langle X_2,\nabla_{[X_3,X_4]}X_1\rangle\}=X_3X_4\langle X_1,X_2\rangle-X_4X_3\langle X_1,X_2\rangle$$
$$-[X_3,X_4]\langle X_1,X_2\rangle=0.$$

(3) 由 $R(X_3,X_4)=-R(X_4,X_3)$得到.

(4) 由(1)(2)(3)得到
$$0=K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_1,X_3,X_4,X_2)$$
$$+K(X_1,X_4,X_2,X_3)-K(X_2,X_3,X_4,X_1)$$
$$-K(X_2,X_4,X_1,X_3)-K(X_2,X_1,X_3,X_4)$$
$$-K(X_3,X_4,X_1,X_2)-K(X_3,X_1,X_2,X_4)$$
$$-K(X_3,X_2,X_4,X_1)+K(X_4,X_1,X_2,X_3)$$
$$+K(X_4,X_2,X_3,X_1)+K(X_4,X_3,X_1,X_2)$$
$$=2K(X_1,X_2,X_3,X_4)-2K(X_3,X_4,X_1,X_2),$$
$$K(X_1,X_2,X_3,X_4)=K(X_3,X_4,X_1,X_2).\quad \#$$

引理 5　设$\{X_i\}$为局部坐标邻域U中的C^∞基向量场，$K_{ijkl}=K(X_i,X_j,X_k,X_l)$，则

(1) $K_{ijkl}=\sum_{s=1}^{n} g_{is}R^s_{jkl}$;

(2) $K_{ijkl}=-K_{jikl}, K_{ijkl}=-K_{ijlk}, K_{ijkl}=K_{klij}$,

$$R^s_{ijk}+R^s_{jki}+R^s_{kij}=0,$$

$$K_{ijkl}+K_{iklj}+K_{iljk}=0.$$

证明 (1) $K_{ijkl}=K(X_i, X_j, X_k, X_l)=\langle X_i, R(X_k, X_l)X_j\rangle$

$=\langle X_i, \sum_{s=1}^{n} R^s_{jkl}X_s\rangle=\sum_{s=1}^{n} g_{is}R^s_{jkl}$.

(2) 分别由引理 4 的(2)(3)(4)和(1)得到. #

引理 6 设 $X, Y\in T_pM$, $\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle-\langle X, Y\rangle^2\neq 0$(即 X, Y 线性无关,它们张成 2 维平面 $\widehat{XY}$. 令

$$\overline{K}(X, Y)=\frac{K(X, Y, X, Y)}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle-\langle X, Y\rangle^2},$$

则 $\overline{K}(X, Y)=\overline{K}(aX+bY, cX+dY)$, $ad-bc\neq 0$(即$\overline{K}$与张成 $\widehat{XY}$ 的基的选取无关.

证明 由 $aX+bY$ 和 $cX+dY$ 张成的平行四边形面积平方为

$\langle aX+bY, aX+bY\rangle\langle cX+dY, cX+dY\rangle-\langle aX+bY, cX+dY\rangle^2$

$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2(\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle-\langle X, Y\rangle^2)$. 而由引理 4 得到

$$\begin{aligned}
&K(aX+bY, cX+dY, aX+bY, cX+dY)\\
&=\langle aX+bY, R(aX+bY, cX+dY)(cX+dY)\rangle\\
&=\langle aX+bY, (ad-bc)R(X, Y)(cX+dY)\rangle\\
&=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\langle aX+bY, R(X, Y)(cX+dY)\rangle\\
&=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\{ac\langle X, R(X, Y)X\rangle+ad\langle X, R(X, Y)Y\rangle\\
&\quad+bc\langle Y, R(X, Y)X\rangle+bd\langle Y, R(X, Y)Y\rangle\}
\end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 \langle X, R(X, Y)Y\rangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 K(X, Y, X, Y)$$

故 $\quad \overline{K}(aX+bY, cX+dY)=$

$$\frac{K(aX+bY, cX+dY, aX+bY, cX+dY)}{\langle aX+bY, aX+bY\rangle\langle cX+dY\rangle\langle cX+dY\rangle-\langle aX+bY, cX+dY\rangle^2}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 K(X,Y,X,Y)}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 (\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2)}=\overline{K}(X,Y). \qquad \#$$

定义 4 在引理 6 中,定义由线性无关的向量 $X, Y\in T_pM$ 张成的 2 维平面 $\widehat{XY}$ 的(**Riemann**)**截曲率**为

$$R_p(\widehat{XY})\overline{K}(X,Y)=\frac{K(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2},$$

它不仅依赖于点 $p\in M$,而且也依赖于平面 $\widehat{XY}$.

定理 2 设$(M,\langle,\rangle)$为 n 维 C^∞ Riemann 流形, 则(1) $(M, \langle,\rangle)$具有常 Riemann 截曲率 c(每点处的任何截曲率为 c)$\Leftrightarrow$(2) $K=cK_1\Leftrightarrow$(3) 对任何 X_1, X_2, $X_3\in C^\infty(TM)$, 有 $R(X_1,X_2)X_3=c\{\langle X_3,X_2\rangle X_1-\langle X_3,X_1\rangle X_2\}$. 其中

$$K_1(X_1,X_2,X_3,X_4)=\langle X_1,X_3\rangle\langle X_2,X_4\rangle-\langle X_2,X_3\rangle\langle X_4,X_1\rangle$$

(显然 K_1 满足引理 4 中关于 K 的 4 个条件).

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 由

$$R_p(\widehat{XY})=\frac{K(X_1,X_2,X_1,X_2)}{\langle X_1,X_1\rangle\langle X_2,X_2\rangle-\langle X_1,X_2\rangle^2}=c,$$

$\langle X_1,X_1\rangle\langle X_2,X_2\rangle-\langle X_1,X_2\rangle^2\neq 0$ 得到 $K(X_1,X_2,X_1,X_2)=$

$cK_1(X_1,X_2,X_1,X_2)$, $\langle X_1, X_1\rangle\langle X_2,X_2\rangle-\langle X_1, X_2\rangle^2\neq 0$.

因为 K 和 K_1 满足引理 4 的 4 个条件, 所以上式当$\langle X_1, X_1\rangle\langle X_2, X_2\rangle-\langle X_1, X_2\rangle^2=0$ 时(即$X_1=\lambda X_2$ 或 $X_2=\lambda X_1$)也成立.

为证明 $K=cK_1$，设 $S=K-cK_1$，则对任何 $X_1, X_2\in C^\infty(TM)$，$S(X_1, X_2, X_1, X_2)=0$. 于是，对任何 $X_1, X_2, X_4\in C^\infty(TM)$，有

$$0=S(X_1, X_2+X_4, X_1, X_2+X_4)=S(X_1, X_2, X_1, X_4)$$
$$+S(X_1, X_4, X_1, X_2)=2S(X_1, X_2, X_1, X_4),$$

即
$$S(X_1, X_2, X_1, X_4)=0.$$

进一步，从上式得到，对任何 $X_1, X_2, X_3, X_4\in C^\infty(TM)$，有

$$0=S(X_1+X_3, X_2, X_1+X_3, X_4)=S(X_1, X_2, X_3, X_4)$$
$$+S(X_3, X_2, X_1, X_4)=S(X_1, X_2, X_3, X_4)$$
$$-S(X_1, X_4, X_2, X_3),$$
$$S(X_1, X_2, X_3, X_4)=S(X_1, X_4, X_2, X_3).$$

用 X_3, X_4, X_2 代替 X_2, X_3, X_4 得到

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4)$$
$$=S(X_1, X_3, X_4, X_2),\ X_1, X_2, X_3, X_4\in C^\infty(TM),$$

由上可推出，对任何 $X_1, X_2, X_3, X_4\in C^\infty(TM)$.

$$3S(X_1, X_2, X_3, X_4)=S(X_1, X_2, X_3, X_4)$$
$$+S(X_1, X_3, X_4, X_2)+S(X_1, X_4, X_2, X_3)=0,$$
$$S(X_1, X_2, X_3, X_4)=0,$$

即
$$K-cK_1=0, K=cK_1.$$

(2)⇒(3) 因为

$$\langle X_4, R(X_1, X_2)X_3\rangle=K(X_4, X_3, X_1, X_2)$$
$$=cK_1(X_4, X_3, X_1, X_2)$$
$$=c\{\langle X_4, X_1\rangle\langle X_3, X_2\rangle-\langle X_3, X_1\rangle\langle X_2, X_4\rangle\}$$
$$=\langle X_4, c\{\langle X_3, X_2\rangle X_1-\langle X_3, X_1\rangle X_2\}\rangle,$$

故(注意 X_4 是任取的)

$$R(X_1, X_2)X_3=c\{\langle X_3, X_2\rangle X_1-\langle X_3, X_1\rangle X_2\}.$$

$$(3)\Rightarrow(1)\quad R(\widehat{XY})=\frac{K(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2}$$

$$=\frac{\langle X,R(X,Y)Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2}$$

$$=\frac{c\langle X,\langle Y,Y\rangle X-\langle Y,X\rangle Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2}=c.\quad \#$$

注 3 容易验证，

$(M,\langle,\rangle)$具有常Riemann截曲率$c\Longleftrightarrow k_{ijkl}=c(g_{ik}g_{lj}-g_{kj}g_{il})$.

下面我们给出几个常 Riemann 截曲率的古典例子.

例 1 设$\{x^i\}$为 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上的通常的整体坐标系，$g=\langle,\rangle$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的通常的 C^∞ Riemann 度量，即

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta^i_j,\ \langle X,Y\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_{j=1}^n b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^n a^ib^i.$$

则由公式 $\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^n g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right)$得到 $\Gamma^k_{ij}=0$,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^n\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}=0,$$

$$\nabla_XY=\nabla_X\left(\sum_{j=1}^n b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{j=1}^n(Xb^j)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

特别当σ 为 C^∞ 曲线，$X=\sigma'(t)$时，

$$\nabla_{\sigma'}Y=\sum_{j=1}^n(\sigma'b^j)\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{j=1}^n\frac{db^j(\sigma(t))}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

如果σ 为坐标曲线 x^i，则有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}Y=\sum_{j=1}^n\frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

显然,向量的平移方程为

$$\frac{db^j}{dt}=0, j=1, \cdots, n,\ Y(t)=\sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}, b^j \text{ 为常数 } (j=1, \cdots, n).$$

而测地线方程为

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2}=0, x^j=\alpha_j t+\beta_j, j=1, \cdots, n,$$

即测地线为 E^n 中的直线.

此外,$\omega^i=dx^i$, $\omega^i_j=\sum_{k=1}^{n}\Gamma^i_{kj}\omega^k=0$, Cartan 结构方程两边全为 0. 由 $T^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}=0$ 或定理 1 知 $T=0$. 由

$$\sum_{k=1}^{n} R^k_{lij}\frac{\partial}{\partial x^k}=R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$-\nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]}\frac{\partial}{\partial x^k}=0$$

或从 $R^k_{lij}=\sum_{s=1}^{n}(\Gamma^s_{jl}\Gamma^k_{is}-\Gamma^s_{il}\Gamma^k_{js})+\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^k_{jl}-\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^k_{il}$ 得到 $R^k_{lij}=0$. 从而

$$R(X,Y)Z=R\left(\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}c^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{n}a^i b^j c^k R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}=0,$$

$$K(X_1, X_2, X_3, X_4)=\langle X_1, R(X_3, X_4)X_2\rangle=\langle X_1, 0\rangle=0,$$

$$R_p(\widehat{XY})=\frac{K(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2}=0.$$

由于$(R^n, \langle,\rangle)$的 Riemann 截曲率恒为 0,故称它为平坦空间.

例 2 设 $M=\left\{x=(x_1, \cdots, x_n)\in R^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}x_i^2<-\frac{4}{c}\right\}$,其中$c<0$

为常数．记 $X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}, i=1,\cdots,n$，这里$\{x_i\}$为 R^n 的通常的坐标．在 M 上定义 Riemann 度量 $g=\langle,\rangle$为

$$g_{ij}=\langle X_i,\ X_j\rangle=\frac{1}{A^2}\delta^i_j, A=1+\frac{c}{4}\sum_{r=1}^{n}x_r^2 \quad >1+\frac{c}{4}\left(-\frac{4}{c}\right)=0,$$

$$g(X,Y)=g\left(\sum_{i=1}^{n}a^iX_i,\ \sum_{j=1}^{n}b^jX_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a^ib^j\frac{1}{A^2}\delta^i_j$$

$$=\frac{1}{A^2}\sum_{i=1}^{n}a^ib^i.$$

称$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为双曲空间或 Poincaré 空间．

现在来证明$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$具有负常 Riemann 截曲率 c．

由 $g_{ij}=\frac{1}{A^2}\delta^i_j$ 知 $g^{ij}=A^2\delta^i_j$．

如果 i,j,k 互不相同，则$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right)$中，$g_{ij}=0$，$g^{kj}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i}=0$，$g^{ki}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j}=0$，因而 $\Gamma^k_{ij}=0$．

如果 i,j 不相同，则

$$\Gamma^j_{ij}=\Gamma^j_{ji}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{jr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}g^{jj}\left(\frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j}\right)=\frac{1}{2}(A^2\delta^j_j)\frac{\partial\left(\frac{1}{A^2}\right)}{\partial x_i}$$

$$=\frac{1}{2}A^2\left(-2A^{-3}\cdot\frac{c}{4}2x_i\right)=-\frac{cx_i}{2A},$$

$$\Gamma^j_{ii}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{jr}\left(\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}g^{jj}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j}\right)$$

$$=\frac{1}{2}A^2\left(-\frac{\partial\left(\frac{1}{A^2}\right)}{\partial x_j}\right)=\frac{cx_j}{2A}.$$

还有 $\Gamma^i_{ii}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{ir}\left(\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_r}\right)$

$$=\frac{1}{2}g^{ii}\left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}A^2\frac{\partial\left(\frac{1}{A^2}\right)}{\partial x_i}=-\frac{cx_i}{2A}.$$

于是，$\Gamma^j_{ji}=\Gamma^j_{ij}=-\frac{cx_i}{2A}$, $\Gamma^j_{ii}=\frac{cx_j}{2A}(i\neq j)$, $\Gamma^k_{ij}=0$(其它).

$$R^i_{jij}=\sum_{s=1}^{n}(\Gamma^s_{jj}\Gamma^i_{is}-\Gamma^s_{ij}\Gamma^i_{js})+\frac{\partial\Gamma^i_{jj}}{\partial x_i}-\frac{\partial\Gamma^i_{ij}}{\partial x_j}$$

$$=\left(\sum_{s\neq i,j}\Gamma^s_{jj}\Gamma^i_{is}\right)+\Gamma^i_{jj}\Gamma^i_{ii}+\Gamma^j_{jj}\Gamma^i_{ij}-\Gamma^i_{ij}\Gamma^i_{ji}$$

$$-\Gamma^j_{ij}\Gamma^i_{jj}+\frac{\partial\Gamma^i_{jj}}{\partial x_i}-\frac{\partial\Gamma^i_{ij}}{\partial x_j}$$

$$=\sum_{s\neq i,j}\frac{cx_s}{2A}\left(-\frac{cx_s}{2A}\right)+\frac{cx_i}{2A}\left(-\frac{cx_i}{2A}\right)+\left(-\frac{cx_j}{2A}\right)\left(-\frac{cx_j}{2A}\right)$$

$$-\left(-\frac{cx_j}{2A}\right)\left(-\frac{cx_j}{2A}\right)-\left(-\frac{cx_i}{2A}\right)\left(\frac{cx_i}{2A}\right)$$

$$+\frac{\partial\left(\frac{cx_i}{2A}\right)}{\partial x_i}-\frac{\partial\left(-\frac{cx_j}{2A}\right)}{\partial x_j}=-\left(\sum_{s\neq i,j}\frac{c^2x_s^2}{4A^2}\right)$$

$$+\left(\frac{c}{2A}-\frac{c^2x_i^2}{4A^2}\right)+\left(\frac{c}{2A}-\frac{c^2x_j^2}{4A^2}\right)=\frac{c}{A}-\sum_{s=1}^{n}\frac{c^2x_s^2}{4A^2}$$

$$=\frac{c}{A}-\frac{c}{A^2}(A-1)=\frac{c}{A^2}\quad(i\neq j),$$

$$R(\widehat{X_iX_j})=\frac{\langle X_i,R(X_i,X_j)X_j\rangle}{\langle X_i,X_i\rangle\langle X_j,X_j\rangle-\langle X_i,X_j\rangle^2}$$

$$=\frac{\left\langle X_i,\ \sum\limits_{k=1}^{n} R_{jij}^{k} X_k\right\rangle}{\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{A^2}-0^2}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} R_{jij}^{k}\delta_k^i/A^2}{\frac{1}{A^4}}$$

$$=A^2R_{jij}^{i}=A^2\cdot\frac{c}{A^2}=c\quad(i\neq j).$$

我们可进一步证明 M 具有负常 Riemann 截曲率 c. 令 $e_i=AX_i$, 则 $\langle e_i,e_j\rangle=\langle AX_i,\ AX_j\rangle=A^2\frac{\delta_j^i}{A^2}=\delta_j^i$, 即 $\{e_i\}$ 为 TM 的规范正交基. 设 π 为 $p\in M$ 的任一 2 维平面, $\{f_1,f_2\}$ 为 π 的规范正交基. 将 $\{f_1,f_2\}$ 扩充到 $\{f_1,\cdots,f_n\}$, 使其为 T_pM 的规范正交基, 则存在正交变换 U 使 $f_i=Ue_i$, $i=1,\cdots,n$. 因为 $\langle UX,UY\rangle=\frac{1}{A^2}\langle UX,UY\rangle_{通常}=\frac{1}{A^2}\langle X,\ Y\rangle_{通常}=\langle X,\ Y\rangle$. 因此, 如果作正交变换 $U:M\to M$, 则 $U_{*U^{-1}p}=U:T_{U^{-1}p}M\to T_pM$, 它保持切空间的内积不变. 由此得到相应的联络系数、Riemann 联络是一致的, 故

$$R_p(\widehat{f_1\ f_2})=R_p(\widehat{Ue_1\ Ue_2})=R_{U^{-1}p}(\widehat{e_1\ e_2})=R_{U^{-1}p}(\widehat{AX_1\ AX_2})$$
$$=R_{U^{-1}p}(\widehat{X_1\ X_2})=c.$$

下面我们利用公式来直接进行计算. 由于

$$g=\frac{1}{A^2}\sum_i dx_i\otimes dx_i,\ 其中\ A=1+\frac{c}{4}\sum_r x_r^2$$

$$g_{ij}=\frac{\delta_{ij}}{A^2},\ g^{ij}=A^2\delta_{ij},\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

我们有

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_r g^{kr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right)$$

$$=-\frac{c}{2A}(\delta_{ki}x_j+\delta_{kj}x_i-\delta_{ij}x_k)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^s_{lj}-\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^s_{kj}=-\frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\delta_{sl}x_j+\delta_{sj}x_l-\delta_{lj}x_s}{A}$$

$$+\frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\delta_{sk}x_j+\delta_{sj}x_k-\delta_{kj}x_s}{A}$$

$$=-\frac{c}{2}\frac{\delta_{sl}\delta_{kj}+\delta_{sj}\delta_{kl}-\delta_{lj}\delta_{ks}}{A}+\frac{c}{2}\frac{\delta_{sk}\delta_{lj}+\delta_{sj}\delta_{lk}-\delta_{kj}\delta_{ls}}{A}$$

$$+\frac{c}{2}(\delta_{sl}x_j+\delta_{sj}x_l-\delta_{lj}x_s)\frac{\frac{c}{2}x_k}{A^2}-\frac{c}{2}(\delta_{sk}x_j+\delta_{sj}x_k-\delta_{kj}x_s)$$

$$\cdot\frac{\frac{c}{2}x_l}{A^2}=\frac{c}{A}(\delta_{lj}\delta_{sk}-\delta_{sl}\delta_{kj})$$

$$+\frac{c^2}{4A^2}(\delta_{sl}x_j+\delta_{sj}x_l-\delta_{lj}x_s)x_k-\frac{c^2}{4A^2}(\delta_{sk}x_j+\delta_{sj}x_k-\delta_{kj}x_s)x_l$$

$$=\frac{c^2}{A^2}\left[\frac{1}{c}(\delta_{lj}\delta_{sk}-\delta_{sl}\delta_{kj})\left(1+\frac{c}{4}\sum_r x_r^2\right)+\frac{1}{4}(\delta_{sl}x_k-\delta_{sk}x_l)x_j\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}(\delta_{kj}x_l-\delta_{lj}x_k)x_s\right],\quad \sum_t(\Gamma^t_{lj}\Gamma^s_{kt}-\Gamma^t_{kj}\Gamma^s_{lt})$$

$$=\sum_t\frac{c^2}{4A^2}[(\delta_{tl}x_j+\delta_{tj}x_l-\delta_{lj}x_t)$$

$$\cdot(\delta_{sk}x_t+\delta_{st}x_k-\delta_{kt}x_s)-(\delta_{tk}x_j+\delta_{tj}x_k-\delta_{kj}x_t)$$

$$\cdot(\delta_{sl}x_t+\delta_{st}x_l-\delta_{lt}x_s)]$$

$$=\frac{c^2}{A^2}\left[\frac{1}{4}(\delta_{sk}x_l-\delta_{sl}x_k)x_j+\frac{1}{4}(\delta_{lj}x_k-\delta_{kj}x_l)x_s\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}(\delta_{kj}\delta_{sl}-\delta_{lj}\delta_{sk})\sum_t y_t^2\right],$$

于是,

$$R^s_{jkl}=\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^s_{lj}-\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^s_{kj}+\sum_t(\Gamma^t_{lj}\Gamma^s_{kt}-\Gamma^t_{kj}\Gamma^s_{lt})$$

$$=\frac{c}{A^2}(\delta_{lj}\delta_{sk}-\delta_{sl}\delta_{kj}),$$

$$K_{ijkl}=K\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_l}\right)=\sum_s g_{is}R^s_{jkl}$$

$$=\sum_s\frac{\delta_{is}}{A^2}\cdot\frac{c(\delta_{lj}\delta_{sk}-\delta_{sl}\delta_{kj})}{A^2}=\frac{c}{A^4}(\delta_{lj}\delta_{ik}-\delta_{il}\delta_{kj})$$

$$=c(g_{ik}g_{lj}-g_{kj}g_{il}),$$

再根据注 3 得到 M 具有负常 Riemann 截曲率 c.

例 3　设 $M=\{x=(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,\big|\,\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2=c\}$, $c>0$, $I:M\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ 为包含映射, 为计算 $p\in M$ 的 Riemann 截曲率, 不妨设 p 的第 $n+1$ 个坐标大于 0, 并选取南极投影得到局部坐标系 $\{u_1,\cdots,u_n\}$, 由第一章 § 1 例 3, 有

$$\varphi_1^{-1}:u\mapsto x=\left(\frac{2cu_1}{c+\sum\limits_i u_i^2},\cdots,\frac{2cu_n}{c+\sum\limits_i u_i^2},\frac{\sqrt{c}\left(c-\sum\limits_i u_i^2\right)}{c+\sum\limits_i u_i^2}\right).$$

设 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的标准 Riemann 度量为 $\tilde{g}$, 则 M 的诱导 Riemann 度量 $g=I^*\tilde{g}$, 则

$$(\varphi_1^{-1})^*\circ I^*\tilde{g}=(\varphi_1^{-1})^*\circ I^*\left(\sum_{i=1}^{n+1}dx_i\otimes dx_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2cdu_i}{c+\sum\limits_j u_j^2}-\frac{4cu_i\sum\limits_j u_jdu_j}{\left(c+\sum\limits_j u_j^2\right)^2}\right)$$

$$\otimes\left(\frac{2cdu_i}{c+\sum\limits_j u_j^2}-\frac{4cu_i\sum\limits_j u_jdu_j}{\left(c+\sum\limits_j u_j^2\right)^2}\right)$$

$$+\frac{-4c\sqrt{c}\sum\limits_i u_idu_i}{\left(c+\sum\limits_j u_j^2\right)^2}\otimes\frac{-4c\sqrt{c}\sum\limits_i u_idu_i}{\left(c+\sum\limits_j u_j^2\right)^2}$$

$$
=\frac{4c^2}{\left(c+\sum_j u_j^2\right)^2}\sum_i du_i\otimes du_i-\frac{16c^2}{\left(c+\sum_j u_j^2\right)^3}\left(\sum_j u_j du_j\right)
$$

$$
\otimes\left(\sum_i u_i du_i\right)+\frac{16c^2\sum_i u_i^2}{\left(c+\sum_j u_j^2\right)^4}\left(\sum_j u_j du_j\right)\otimes\left(\sum_j u_j du_j\right)
$$

$$
+\frac{16c^3}{\left(c+\sum_j u_j^2\right)^4}\left(\sum_i u_i du_i\right)\otimes\left(\sum_i u_i du_i\right)
$$

$$
=\frac{4c^2}{\left(c+\sum_j u_j^2\right)^2}\sum_i du_i\otimes du_i=\frac{c^2}{\left(1+\frac{c}{4}\sum_j v_j^2\right)^2}\sum_i dv_i\otimes dv_i,
$$

其中 $\quad u_i=\frac{cv_i}{2}.$

类似例 2 中方法 2 的计算，有

$$
g_{ij}=\frac{c^2}{A^2}\delta_{ij},\ g^{ij}=\frac{A^2}{c^2}\delta_{ij},\ \Gamma_{ij}^k \text{ 和 } R_{jkl}^s \text{ 与例 2 形式相同,}
$$

$$
K_{ijkl}=\frac{c^3}{A^4}(\delta_{lj}\delta_{ik}-\delta_{il}\delta_{kj})=\frac{1}{c}(g_{ik}g_{lj}-g_{kj}g_{il}).
$$

因此，M 的 Riemann 截曲率恒为$\frac{1}{c}$.

如果选$\{x_1,\cdots,x_n\}$为 p 的局部坐标，为方便，设$\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1$，则

$x_{n+1}=\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}$，$dx_{n+1}=-\frac{\sum_{i=1}^n x_i dx_i}{x_{n+1}}$，设 $\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_n)=$

$(x_1,\cdots,x_n,\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2})$，于是

$$
(\varphi^{-1})^*\circ I^*\tilde{g}=(\varphi^{-1})^*\circ I^*\left(\sum_{i=1}^{n+1}dx_i\otimes dx_i\right)
$$

$$=\frac{1}{x_{n+1}^2}\left(-\sum_{i=1}^{n}x_i dx_i\right)\otimes\left(-\sum_{i=1}^{n}x_i dx_i\right)+\sum_{i=1}^{n}dx_i\otimes dx_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x_i^2}{x_{n+1}^2}\right)dx_i\otimes dx_i+\sum_{i\neq j}\frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2}dx_i\otimes dx_j.$$

因为 $\tilde{g}=\sum_{i=1}^{n+1}dx^i\otimes dx^i$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上正定，所以 $(\varphi^{-1})^*\circ I^*\tilde{g}$ 也正定，且

$(g_{ij})=I_n+P'P$，其中 I_n 为 n 阶单位矩阵，$P=\frac{1}{x_{n+1}}(x_1,\ \cdots,\ x_n)$.

设 $(g^{ij})=I_n+\lambda P'P$，则由

$$(I_n+\lambda P'P)(I_n+P'P)=I_n+(\lambda+1)P'P+\lambda P'PP'P$$

$$=I_n+[\lambda(1+PP')+1]P'P=I_n,$$

取 $\lambda(1+PP')+1=0$ 即

$$\lambda=\frac{-1}{1+PP'}=-\frac{1}{1+\frac{1}{x_{n+1}^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=-\frac{x_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2}=-x_{n+1}^2.$$

于是，

$$(g^{ij})=(\delta_{ij}-x_i x_j),$$

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_r g^{kr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{kr}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ir}+\frac{x_i x_r}{x_{n+1}^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\delta_{jr}+\frac{x_j x_r}{x_{n+1}^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\delta_{ij}-\frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{kr}\left[\left(\frac{2x_i x_r x_j}{x_{n+1}^4}+\frac{\delta_{ij}x_r+\delta_{jr}x_i}{x_{n+1}^2}\right)+\left(\frac{2x_j x_r x_i}{x_{n+1}^4}+\frac{\delta_{ij}x_r+\delta_{ir}x_j}{x_{n+1}^2}\right)\right.$$

$$-\left(\frac{2x_ix_jx_r}{x_{n+1}^4}+\frac{\delta_{ir}x_j+\delta_{jr}x_i}{x_{n+1}^2}\right)\bigg]$$

$$=\sum_r(\delta_{kr}-x_kx_r)\left(\frac{x_ix_jx_r}{x_{n+1}^4}+\frac{\delta_{ij}x_r}{x_{n+1}^2}\right)$$

$$=\frac{1}{x_{n+1}^2}\sum_{r=1}^n(\delta_{kr}x_r-x_kx_r^2)\left(\delta_{ij}+\frac{x_ix_j}{x_{n+1}^2}\right)$$

$$=\frac{1}{x_{n+1}^2}\left(x_k-x_k\sum_{r=1}^n x_r^2\right)\left(\delta_{ij}+\frac{x_ix_j}{x_{n+1}^2}\right),$$

$$=x_k\left(\delta_{ij}+\frac{x_ix_j}{x_{n+1}^2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{lj}^s-\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma_{kj}^s=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[x_s\left(\delta_{lj}+\frac{x_lx_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_l}\left[x_s\left(\delta_{kj}+\frac{x_kx_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]$$

$$=(\delta_{ks}\delta_{lj}-\delta_{ls}\delta_{kj})+\frac{\delta_{ks}x_lx_j+\delta_{kl}x_sx_j+\delta_{kj}x_sx_l}{x_{n+1}^2}$$

$$-\frac{\delta_{ls}x_kx_j+\delta_{lk}x_sx_j+\delta_{lj}x_sx_k}{x_{n+1}^2}$$

$$+\frac{2x_lx_jx_sx_k}{x_{n+1}^4}-\frac{2x_sx_kx_jx_l}{x_{n+1}^1}$$

$$=(\delta_{ks}\delta_{lj}-\delta_{ls}\delta_{kj})+\frac{\delta_{ks}x_lx_j+\delta_{kj}x_sx_l-\delta_{ls}x_kx_j-\delta_{lj}x_sx_k}{x_{n+1}^2},$$

$$\sum_t(\Gamma_{lj}^t\Gamma_{kt}^s-\Gamma_{kj}^t\Gamma_{lt}^s)=\sum_t\left[x_t\left(\delta_{lj}+\frac{x_lx_j}{x_{n+1}^2}\right)\cdot x_s\left(\delta_{kt}+\frac{x_kx_t}{x_{n+1}^2}\right)\right.$$

$$\left.-x_t\left(\delta_{kj}+\frac{x_kx_j}{x_{n+1}^2}\right)\cdot x_s\left(\delta_{lt}+\frac{x_lx_t}{x_{n+1}^2}\right)\right]$$

$$=\sum_t x_tx_s\Big[(\delta_{lj}\delta_{kt}-\delta_{kj}\delta_{lt})$$

$$+\frac{\delta_{kt}x_lx_j+\delta_{lj}x_kx_t-\delta_{kj}x_lx_t-\delta_{lt}x_kx_j}{x_{n+1}^2}$$

$$+\frac{x_l x_j x_k x_t - x_k x_j x_l x_t}{x_{n+1}^4}\Bigg] = (\delta_{lj} x_k x_s - \delta_{kj} x_l x_s)$$

$$+\frac{x_k x_s x_l x_j + \delta_{lj} x_k x_s \sum_t x_t^2 - \delta_{kj} x_s x_l \sum_t x_t^2 - x_l x_s x_k x_j}{x_{n+1}^2}$$

$$= (\delta_{lj} x_k x_s - \delta_{kj} x_l x_s) + \frac{(\delta_{lj} x_k x_s - \delta_{kj} x_s x_l)(1 - x_{n+1}^2)}{x_{n+1}^2}$$

$$= \frac{\delta_{lj} x_k x_s - \delta_{kj} x_s x_l}{x_{n+1}^2},$$

$$R^s_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^s_{lj} - \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^s_{kj} + \sum_t (\Gamma^t_{lj}\Gamma^s_{kt} - \Gamma^t_{kj}\Gamma^s_{lt})$$

$$= (\delta_{ks}\delta_{lj} - \delta_{ls}\delta_{kj}) + \frac{\delta_{ks} x_l x_j + \delta_{kj} x_s x_l - \delta_{ls} x_k x_j - \delta_{lj} x_s x_k}{x_{n+1}^2}$$

$$+ \frac{\delta_{lj} x_k x_s - \delta_{kj} x_s x_l}{x_{n+1}^2}$$

$$= \delta_{ks}\left(\delta_{lj} + \frac{x_l x_j}{x_{n+1}^2}\right) - \delta_{ls}\left(\delta_{kj} + \frac{x_k x_j}{x_{n+1}^2}\right),$$

$$\mathrm{K}_{ijkl} = \sum_s g_{is} R^s_{jkl} = \sum_s g_{is}(\delta_{ks} g_{lj} - \delta_{ls} g_{kj}) = g_{ik} g_{lj} - g_{kj} g_{il},$$

这就证明了$M = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$的 Riemann 截曲率为 1.

另一证法参阅 § 4 例 5.

例 4 我们考虑常负曲率的双曲空间的另一例子. 设

$$H^n = \{ x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0 \}$$

$$= \left\{ x \in \boldsymbol{R}^{n+1} \,\middle|\, x = \left(x_1, \cdots, x_n, \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right) \right\},$$

$$\varphi^{-1}: \boldsymbol{R}^n \to H^n,$$

$$(x_1, \cdots x_n) \mapsto \left(x_1, \cdots, x_n, \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right),$$

则微分构造的基$\mathscr{D}'=\{(H^n,\varphi)\}$唯一确定了一个 n 维C^∞流形$(M,\mathscr{D})$. 记$I:H^n\to\mathbf{R}^{n+1}$为包含映射, $\tilde{g}=\sum_{i=1}^{n}dx_i\otimes dx_i-dx_{n+1}\otimes dx_{n+1}$

为 2 阶 C^∞对称协变张量场,令 $g=I^*\tilde{g}$.

则

$$(\varphi^{-1})^*\circ I^*\tilde{g}=\sum_{i=1}^{n}dx_i\otimes dx_i-dx_{n+1}\otimes dx_{n+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x_i^2}{x_{n+1}^2}\right)dx_i\otimes dx_i-\sum_{i\neq j}\frac{x_ix_j}{x_{n+1}^2}dx_i\otimes dx_j,$$

$$(g_{ij})=I_n-P'P=\left(\delta_{ij}-\frac{x_ix_j}{x_{n+1}^2}\right),\quad P=\frac{1}{x_{n+1}}(x_1,\cdots,x_n).$$

根据线性代数中行列式的性质知,

$$\det(\lambda I_n-(I_n-P'P))=\det[(\lambda-1)I_n+P'P]$$

$$=(\lambda-1)^{n-1}\left(\lambda+\frac{-x_{n+1}^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{x_{n+1}^2}\right).$$

有特征值为 1, $\cdots$, 1, $-\dfrac{-x_{n+1}^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{x_{n+1}^2}=\dfrac{1}{x_{n+1}^2}$. 因此, (g_{ij})是正定的, $g=I^*\tilde{g}$ 确实为 H^n 的 Riemann 度量.

令$(g^{ij})=I_n+\lambda P'P$, 则

$$I_n=(I_n-P'P)(I_n+\lambda P'P)=I_n+(\lambda-1)P'P-\lambda(PP')P'P$$

$$=I_n+[\lambda(1-PP')-1]P'P,$$

$$\lambda(1-PP')-1=0,$$

$$\lambda=\frac{1}{1-PP'}=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_{n+1}^2}}=\frac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=x_{n+1}^2,$$

$$(g^{ij})=(\delta_{ij}+x_{n+1}^2P'P)=(\delta_{ij}+x_ix_j),$$

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{kr}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_i x_r}{x_{n+1}^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j x_r}{x_{n+1}^2}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{kr}\left[-\frac{\delta_{jr}x_i+\delta_{ij}x_r}{x_{n+1}^2}+\frac{2x_i x_r x_j}{x_{n+1}^4}-\frac{\delta_{ir}x_j+\delta_{ij}x_r}{x_{n+1}^2}+\frac{2x_i x_j x_r}{x_{n+1}^4}\right.$$

$$\left.+\frac{\delta_{ir}x_j+\delta_{jr}x_i}{x_{n+1}^2}-\frac{2x_i x_j x_r}{x_{n+1}^4}\right]=\sum_{r=1}^{n}(\delta_{kr}+x_k x_r)\left(\frac{x_i x_j x_r}{x_{n+1}^4}-\frac{\delta_{ij}x_r}{x_{n+1}^2}\right)$$

$$=\frac{x_i x_j x_k}{x_{n+1}^4}-\frac{\delta_{ij}x_k}{x_{n+1}^2}+\frac{x_i x_j x_k\sum_{r=1}^{n}x_r^2}{x_{n+1}^4}-\frac{\delta_{ij}x_k\sum_{r=1}^{n}x_r^2}{x_{n+1}^2}$$

$$=\frac{x_i x_j x_k\left(1+\sum_{r=1}^{n}x_r^2\right)}{x_{n+1}^4}-\delta_{ij}x_k\frac{1+\sum_{r=1}^{n}x_r^2}{x_{n+1}^2}=\frac{x_i x_j x_k}{x_{n+1}^2}-\delta_{ij}x_k,$$

$$R^s_{jkl}=\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^s_{lj}-\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^s_{kj}+\sum_t(\Gamma^t_{lj}\Gamma^s_{kt}-\Gamma^t_{kj}\Gamma^s_{lt})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{x_l x_j x_s}{x_{n+1}^2}-\delta_{lj}x_s\right)-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{x_k x_j x_s}{x_{n+1}^2}-\delta_{jk}x_s\right)$$

$$+\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{x_l x_j x_t}{x_{n+1}^2}-\delta_{lj}x_t\right)\left(\frac{x_k x_t x_s}{x_{n+1}^2}-\delta_{kt}x_s\right)$$

$$-\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{x_k x_j x_t}{x_{n+1}^2}-\delta_{kj}x_t\right)\left(\frac{x_l x_t x_s}{x_{n+1}^2}-\delta_{lt}x_s\right)$$

$$=-(\delta_{lj}\delta_{ks}-\delta_{jk}\delta_{ls})$$

$$+\frac{\delta_{lk}x_j x_s+\delta_{kj}x_l x_s+\delta_{ks}x_l x_j-\delta_{lk}x_j x_s-\delta_{lj}x_k x_s-\delta_{ls}x_k x_j}{x_{n+1}^2}$$

$$+\frac{x_l x_j x_s(2x_k)-x_k x_j x_s(2x_l)}{x_{n+1}^4}+\frac{x_l x_j x_k x_s-x_k x_j x_l x_s}{x_{n+1}^4}\sum_{t=1}^{n}x_t^2$$

$$-\frac{x_l x_j x_k x_s - x_k x_j x_l x_s}{x_{n+1}^2}$$

$$-\frac{\delta_{lj} x_k x_s - \delta_{kj} x_l x_s}{x_{n+1}^2} \sum_{t=1}^{n} x_t^2 + \delta_{lj} x_k x_s - \delta_{kj} x_l x_s$$

$$= -(\delta_{lj}\delta_{ks} - \delta_{jk}\delta_{ls}) + \frac{\delta_{kj} x_l x_s - \delta_{lj} x_k x_s}{x_{n+1}^2} + \frac{\delta_{ks} x_l x_j - \delta_{ls} x_k x_j}{x_{n+1}^2}$$

$$+\frac{\delta_{kj} x_l x_s - \delta_{lj} x_k x_s}{x_{n+1}^2}(-1 + x_{n+1}^2) + (\delta_{lj} x_k x_s - \delta_{kj} x_l x_s)$$

$$= -(\delta_{lj}\delta_{ks} - \delta_{jk}\delta_{ls}) + \frac{\delta_{ks} x_l x_j - \delta_{ls} x_k x_j}{x_{n+1}^2},$$

$$K_{ijkl} = \sum_{s=1}^{n} g_{is} R_{jkl}^s$$

$$= \sum_{s=1}^{n} g_{is}\left[-(\delta_{lj}\delta_{ks} - \delta_{jk}\delta_{ls}) + \frac{\delta_{ks} x_l x_j - \delta_{ls} x_k x_j}{x_{n+1}^2}\right]$$

$$= \sum_{s=1}^{n} g_{is}\left[-\delta_{ks}\left(\delta_{lj} - \frac{x_l x_j}{x_{n+1}^2}\right) + \delta_{ls}\left(\delta_{jk} - \frac{x_k x_j}{x_{n+1}^2}\right)\right]$$

$$= \sum_{s=1}^{n} g_{is}(-\delta_{ks} g_{lj} + \delta_{ls} g_{jk}) = -(g_{ik} g_{lj} - g_{il} g_{jk}),$$

这就证明了 H^n 的Riemann 截曲率为-1.

例 5 设 $M = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n > 0\}$ 为上半空间,

$$g = \frac{1}{x_n^2}\sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i, \quad g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}, \quad g^{ij} = x_n^2 \delta_{ij}.$$

则

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} g^{kr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} x_n^2 \delta_{kr}\left(\frac{-2\delta_{ir}\delta_{jn} - 2\delta_{jr}\delta_{in} + 2\delta_{ij}\delta_{rn}}{x_n^3}\right)$$

$$=\frac{1}{x_n}(\delta_{ij}\delta_{kn}-\delta_{ik}\delta_{jn}-\delta_{kj}\delta_{in}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^s_{lj}-\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^s_{kj}=\frac{1}{x_n^2}[-(\delta_{lj}\delta_{sn}-\delta_{sj}\delta_{ln}-\delta_{sl}\delta_{jn})\delta_{kn}$$

$$+(\delta_{kj}\delta_{sn}-\delta_{sj}\delta_{kn}-\delta_{sk}\delta_{jn})\delta_{ln}]=\frac{1}{x_n^2}[-(\delta_{lj}\delta_{sn}-\delta_{sl}\delta_{jn})\delta_{kn}$$

$$+(\delta_{kj}\delta_{sn}-\delta_{sk}\delta_{jn})\delta_{ln}],$$

$$\sum_{t=1}^{n}(\Gamma^t_{lj}\Gamma^s_{kt}-\Gamma^t_{kj}\Gamma^s_{lt})$$

$$=\frac{1}{x_n^2}\sum_{t=1}^{n}[(\delta_{lj}\delta_{tn}-\delta_{tj}\delta_{ln}-\delta_{tl}\delta_{jn})(\delta_{kt}\delta_{sn}-\delta_{st}\delta_{kn}-\delta_{sk}\delta_{tn})$$

$$-(\delta_{kj}\delta_{tn}-\delta_{tj}\delta_{kn}-\delta_{tk}\delta_{jn})(\delta_{lt}\delta_{sn}-\delta_{st}\delta_{ln}-\delta_{sl}\delta_{tn})]$$

$$=\frac{1}{x_n^2}[(\delta_{kj}\delta_{sl}-\delta_{lj}\delta_{sk})+(\delta_{lj}\delta_{sn}-\delta_{sl}\delta_{jn})\delta_{kn}$$

$$+(\delta_{sk}\delta_{jn}-\delta_{kj}\delta_{sn})\delta_{ln}],$$

$$R^s_{jkl}=\frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^s_{lj}-\frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^s_{kj}+\sum_{t=1}^{n}(\Gamma^t_{lj}\Gamma^s_{kt}-\Gamma^t_{kj}\Gamma^s_{lt})$$

$$=\frac{1}{x_n^2}(\delta_{kj}\delta_{sl}-\delta_{lj}\delta_{sk}),$$

$$K_{ijkl}=\sum_{s=1}^{n}g_{is}R^s_{jkl}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{x_n^4}\delta_{is}(\delta_{kj}\delta_{sl}-\delta_{lj}\delta_{sk})$$

$$=\frac{-1}{x_n^4}(\delta_{ik}\delta_{lj}-\delta_{kj}\delta_{il})=-(g_{ik}g_{lj}-g_{kj}g_{il}),$$

这就证明了 M 的Riemann 截曲率为-1.

§4 Riemann 正则子流形的Riemann 联络

设$(\tilde{M},\langle,\rangle)$为 n 维 C^∞Riemann 流形，M 为$\tilde{M}$的 m 维C^∞Riemann 正则子流形，$\tilde{\nabla}$ 为$\tilde{M}$的 Riemann 联络.

定理1 设 $X,Y\in C^\infty(TM)$，∇_XY 和 $V(X,Y)$ 为 $\widetilde{\nabla}_XY$ 的唯一的切分量和法分量(图 28)：

$$\widetilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+V(X,Y)$$

(Gauss 公式)

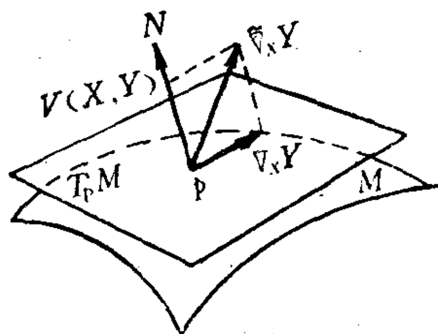


图 28

则 (1) ∇ 为 TM 上的 Riemann 联络；

(2) V 为 TM 上的对称的向量值($T\widetilde{M}$ 上的)协变 C^∞ 张量场；

(3) $\widetilde{R}(X,Y)Z(X,Y,Z\in C^\infty(TM))$ 唯一分解为切分量和法分量： $\widetilde{R}(X,Y)Z=$切$\widetilde{R}(X,Y)Z+$法$\widetilde{R}(X,Y)Z$，

其中

切$\widetilde{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z+$切$\{\widetilde{\nabla}_XV(Y,Z)-\widetilde{\nabla}_YV(X,Z)\}$

(Gauss 曲率方程)，

法$\widetilde{R}(X,Y)Z=V(X,\nabla_YZ)-V(Y,\nabla_XZ)-V([X,Y],Z)+$

法$\{\widetilde{\nabla}_XV(Y,Z)-\widetilde{\nabla}_YV(X,Z)\}$(Codazzi-Mainardi 方程)。

(4) $\nabla^\perp:C^\infty(TM)\times C^\infty(TM^\perp)\to C^\infty(TM^\perp)$,

$$(X,N)\mapsto\nabla_X^\perp N=(\widetilde{\nabla}_XN)^\perp$$

为 $TM^\perp$ 上的线性联络，称为**法(丛)联络**．且

$X\langle N_1,N_2\rangle=\langle\nabla_X^\perp N_1,N_2\rangle+\langle N_1,\nabla_X^\perp N_2\rangle$，$X\in C^\infty(TM)$，$N_1$，$N_2\in C^\infty(TM^\perp)$．

证明 因为 M 为 $\widetilde{M}$ 的 C^∞ 正则子流形，对任何 $X\in C^\infty(TM)$，$p\in M$，可以选取 p 的关于 $\widetilde{M}$ 的特殊坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$，使得在 $U\cap M$ 中，

$X=\sum\limits_{i=1}^m a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$a^i$ 为 $x^1,\cdots,x^m$ 的 C^∞ 函数，再选取 p 的开邻域 $U_1\subset U$ 和 $f\in C^\infty(\widetilde{M},\mathbf{R})$，使 $f|_{U_1}=1$，$f|_{\widetilde{M}-U}=0$．于是，$\widetilde{X}=f\cdot\Big(\sum\limits_{i=1}^m a^i\cdot$

$\left.\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^i}\right)$可视作$\tilde{M}$的 C^∞向量场($\tilde{X}|_{\tilde{M}-U}=0$)，且 $\tilde{X}|_{U_1\cap M}=X$.

为了证明∇和 V 在M上是 C^∞的，我们任取 $p\in M$，设(U,φ)，$\{x^i\}$为 p 的特殊坐标系，$\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}$和$\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^1},\cdots,\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^n}$分别为$M$ 和$\tilde{M}$的局部坐标基向量场，而$\left.\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^1}\right|_{U\cap M}=\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\left.\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^m}\right|_{U\cap M}=\frac{\partial}{\partial x^m}$. 由§1引理 4 可以得到$U$上的 C^∞规范正交的基向量场 $\tilde{Z}_1,\cdots,\tilde{Z}_n$，使得 $\tilde{Z}_1|_{U\cap M}=Z_1,\cdots,\tilde{Z}_m|_{U\cap M}=Z_m$ 为 $U\cap M$ 上的相应的 C^∞ 规范正交的基向量场，而 $\tilde{Z}_{m+1}|_{U\cap M},\cdots,\tilde{Z}_n|_{U\cap M}$为$T(U\cap M)^\perp$ 上的 C^∞的规范正交的基向量场. 令

$$X=\sum_{i=1}^m\lambda^iZ_i,\qquad Y=\sum_{j=1}^m\mu^jZ_j,$$

$$\tilde{\nabla}_{Z_i}Z_j=\sum_{k=1}^n\eta_{ij}^kZ_k,$$

则

$$\tilde{\nabla}_XY=\sum_{j=1}^m(X\mu^j)Z_j+\sum_{i,j=1}^m\sum_{k=1}^n\lambda^i\mu^j\eta_{ij}^kZ_k,$$

$$\nabla_XY=\sum_{k=1}^m\Big\{(X\mu^k)+\sum_{i,j=1}^m\lambda^i\mu^j\eta_{ij}^k\Big\}Z_k,$$

$$V(X,Y)=\sum_{k=m+1}^n\left(\sum_{i,j=1}^m\lambda^i\mu^j\eta_{ij}^k\right)Z_k.$$

从上面两式可看出 ∇_XY 和$V(X,Y)$在 $U\cap M$上是 C^∞的.

(1)、(2)因为

$$\nabla_{X_1+X_2}Y+V(X_1+X_2,Y)=\tilde{\nabla}_{X_1+X_2}Y=\tilde{\nabla}_{X_1}Y+\tilde{\nabla}_{X_2}Y$$
$$=(\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_2}Y)+\{V(X_1,Y)+V(X_2,Y)\},$$

$$\nabla_{fX}Y+V(fX,Y)=\tilde{\nabla}_{fX}Y=f\tilde{\nabla}_XY=f\{\nabla_XY+V(X,Y)\},$$

$$\nabla_X(Y_1+Y_2)+V(X,\ Y_1+Y_2)=\widetilde{\nabla}_X(Y_1+Y_2)=\widetilde{\nabla}_XY_1+\widetilde{\nabla}_XY_2$$
$$=(\nabla_XY_1+\nabla_XY_2)+\{V(X,Y_1)+V(X,Y_2)\},$$
$$\nabla_X(fY)+V(X,fY)=\widetilde{\nabla}_X(fY)=(Xf)Y+f\widetilde{\nabla}_XY$$
$$=\{(Xf)Y+f\nabla_XY\}+fV(X,Y)$$

得到∇满足线性联络的3个条件和V为向量值的C^∞协变张量场.又因为在$U\cap M$上有

$$[X,Y]=\widetilde{[\tilde{X},\tilde{Y}]}=\widetilde{\nabla}_X\tilde{Y}-\widetilde{\nabla}_Y\tilde{X}=\widetilde{\nabla}_XY-\widetilde{\nabla}_YX$$
$$=(\nabla_XY-\nabla_YX)+\{V(X,Y)-V(Y,X)\}.$$

因此,$V(X,Y)=V(Y,X)$(对称),且

$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]=0,$$
$$Z\langle X,Y\rangle=\tilde{Z}\langle\tilde{X},\tilde{Y}\rangle=\langle\widetilde{\nabla}_Z\tilde{X},\tilde{Y}\rangle+\langle\tilde{X},\ \widetilde{\nabla}_Z\tilde{Y}\rangle$$
$$=\langle\widetilde{\nabla}_ZX,\ Y\rangle+\langle X,\ \widetilde{\nabla}_ZY\rangle$$
$$=\langle\nabla_ZX+(\widetilde{\nabla}_ZX)^\perp,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY+(\widetilde{\nabla}_ZY)^\perp\rangle$$
$$=\langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY\rangle,$$

即∇满足 Riemann 联络的条件(4) 和(5). 由 §3 定理 1 中的唯一性,∇ 就是$(M,\langle,\rangle)$的 Riemann 联络.

(3) 由 $\tilde{R}(X,Y)Z=\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_YZ-\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_XZ-\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$

$$=\widetilde{\nabla}_X(\nabla_YZ+V(Y,Z))-\widetilde{\nabla}_Y(\nabla_XZ+V(X,Z))-(\nabla_{[X,Y]}Z$$
$$+V([X,Y],Z))$$
$$=\{\nabla_X\nabla_YZ+V(X,\nabla_YZ)+\widetilde{\nabla}_XV(Y,Z)\}-\{\nabla_Y\nabla_XZ+V(Y,\nabla_XZ)$$
$$+\widetilde{\nabla}_YV(X,Z)\}-\{\nabla_{[X,Y]}Z+V([X,Y],Z)\}$$
$$=R(X,Y)Z+\widetilde{\nabla}_XV(Y,Z)-\widetilde{\nabla}_YV(X,Z)+V(X,\nabla_YZ)$$
$$-V(Y,\nabla_XZ)-V([X,Y],Z)$$

推出

切$\tilde{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z+$切$\{\widetilde{\nabla}_X V(Y,Z)-\widetilde{\nabla}_Y V(X,Z)\}$,

法$\tilde{R}(X,Y)Z=V(X,\nabla_Y Z)-V(Y,\nabla_X Z)-V([X,Y],Z)$

$+$法$\{\widetilde{\nabla}_X V(Y,Z)-\widetilde{\nabla}_Y V(X,Z)\}$.

(4) $\nabla^\perp$满足线性联络的条件(1)、(2)是明显的. 条件(3)是因为

$$\nabla^\perp_X(fN)=(\widetilde{\nabla}_X(fN))^\perp=((Xf)N+f\widetilde{\nabla}_X N)^\perp=(Xf)N$$

$$+f(\widetilde{\nabla}_X N)^\perp$$

$$=(Xf)N+f\nabla^\perp_X N.$$

现证最后的等式:

$$\langle\nabla^\perp_X N_1,N_2\rangle+\langle N_1,\nabla^\perp_X N_2\rangle=\langle(\widetilde{\nabla}_X N_1)^\perp,N_2\rangle+\langle N_1,$$

$$(\widetilde{\nabla}_X N_2)^\perp\rangle$$

$$=\langle\widetilde{\nabla}_X N_1,N_2\rangle+\langle N_1,\widetilde{\nabla}_X N_2\rangle=X\langle N_1,N_2\rangle. \qquad \#$$

注 1 关于∇, $\widetilde{\nabla}$和$\widetilde{[\,,\,]}$运算的合理性主要根据§2引理5以及M上的C^∞向量场X可对应于$\widetilde{M}$上的C^∞向量场$\widetilde{X}$,使$\widetilde{X}|_{U\cap M}=X$.

定义 1 $(\widetilde{M},\tilde{g})=(\widetilde{M},\langle,\rangle)$在$M$上诱导的度量张量$g=I^*\tilde{g}$称为$M$上的**第I基本形式**,而$V$称为$M$的**第II基本形式**,其中$I:M\to\widetilde{M}$为包含映射.

例 1 设M为$\widetilde{M}$的$n-1$维C^∞Riemann正则子流形(超曲面,$n\geqslant 3$),N为M上的局部C^∞单位法向量场. 我们定义Weingarten映射:

$$LX=\widetilde{\nabla}_X N,\ X\in T_pM.$$

因为$0=X\langle N,N\rangle=2\langle\widetilde{\nabla}_X N,N\rangle$, 故$LX=\widetilde{\nabla}_X N\in T_pM$. 容易看出$L$为切空间上的线性变换.

如果X,Y,N都是局部C^∞类的,由于

$$\langle V(X,Y),N\rangle=\langle\widetilde{\nabla}_XY,N\rangle=X\langle Y,N\rangle-\langle Y,\widetilde{\nabla}_XN\rangle$$
$$=0-\langle Y,LX\rangle=-\langle LX,Y\rangle,$$

所以，$V(X,Y)=-\langle LX,Y\rangle N$. Gauss 公式成为

$$\widetilde{\nabla}_XY=\nabla_XY-\langle LX,Y\rangle N.$$

同时还可以看出

$V(X,Y)=V(Y,X)\Leftrightarrow\langle LX,Y\rangle=\langle X,LY\rangle$，即 L 为自共轭线性变换. 此外，有

$$\widetilde{\nabla}_XV(Y,Z)=-\widetilde{\nabla}_X(\langle LY,Z\rangle N)=-X\langle LY,Z\rangle N$$
$$-\langle LY,Z\rangle LX,$$

$$-\widetilde{\nabla}_YV(X,Z)=\widetilde{\nabla}_Y(\langle LX,Z\rangle N)=Y\langle LX,Z\rangle N+\langle LX,Z\rangle LY,$$
$$V(X,\nabla_YZ)=-\langle LX,\nabla_YZ\rangle N=\langle\nabla_YLX,Z\rangle N-Y\langle LX,Z\rangle N,$$
$$-V(Y,\nabla_XZ)=\langle LY,\nabla_XZ\rangle N=-\langle\nabla_XLY,Z\rangle N+X\langle LY,Z\rangle N,$$
$$-V([X,Y],Z)=\langle L[X,Y],Z\rangle N.$$

于是，Gauss 曲率方程为

$$切\tilde{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z-\{\langle LY,Z\rangle LX-\langle LX,Z\rangle LY\}.$$

Codazzi-Mainardi 方程为

$$法\tilde{R}(X,Y)Z=-\langle\nabla_XLY-\nabla_YLX-L[X,Y],Z\rangle N.$$

设 X, Y 为 T_pM 中 2 维平面的规范正交基，$R_p(\widehat{XY})$ 和 $\tilde{R}_p(\widehat{XY})$ 分别为 $\widehat{XY}$ 关于 M 和 $\tilde{M}$ 的 Riemann 截曲率. 则

$$\tilde{R}_p(\widehat{XY})=\langle X,\tilde{R}(X,Y)Y\rangle=\langle X,切\tilde{R}(X,Y)Y\rangle$$
$$=\langle X,R(X,Y)Y\rangle-\langle X,\langle LY,Y\rangle LY\rangle+\langle X,\langle LX,Y\rangle LY\rangle$$
$$=R_p(\widehat{XY})-\{\langle LX,X\rangle\langle LY,Y\rangle-\langle LX,Y\rangle^2\},$$

即

$$\tilde{R}_p(\widehat{XY})=R_p(\widehat{XY})-\{\langle LX,X\rangle\langle LY,Y\rangle-\langle LX,Y\rangle^2\}$$

例 2 设 M 为 $\widetilde{M}$ 的 $n-k$ 维 C^∞ Riemann 正则子流形，$N_1, \cdots, N_k$ 为 $TM^\perp$ 上的局部 C^∞ 规范正交基向量场. 我们定义 k 个 Weingarten 映射:

$$L_j X = \widetilde{\nabla}_X N_j - \sum_{s=1}^{k} \langle \widetilde{\nabla}_X N_j, N_s \rangle N_s, \quad X \in T_p M.$$

类似例 1 可看出 L_j 为切空间上的线性变换，且Gauss 公式成为

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + V(X, Y) = \nabla_X Y - \sum_{j=1}^{k} \langle L_j, X, Y, \rangle N_j.$$

同时还可看出

$$V(X, Y) = V(Y, X) \Leftrightarrow \langle L_j X, Y \rangle = \langle X, L_j Y \rangle,$$

即 L_j 为自共轭线性变换，$j=1, \cdots, k$. 而 Gauss 曲率方程为

$$\text{切}\ \widetilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \sum_{j=1}^{k} \{\langle L_j Y, Z \rangle L_j X - \langle L_j X, Z \rangle L_j Y\},$$

Codazzi—Mainardi 方程为

$$\text{法}\ \widetilde{R}(X, Y)Z = -\sum_{j=1}^{k} \langle \nabla_X L_j Y - \nabla_Y L_j X - L_j [X, Y], Z \rangle N_j$$

$$+ \sum_{s, j=1}^{k} \left\{ \langle L_j X, Z \rangle \langle \widetilde{\nabla}_Y N_j, N_s \rangle - \langle L_j Y, Z \rangle \langle \widetilde{\nabla}_X N_j, N_s \rangle \right\} N_s.$$

Riemann 截曲率 $R_p(\widehat{XY})$ 与 $\widetilde{R}_p(\widehat{XY})$ 的关系为

$$\widetilde{R}_p(\widehat{XY}) = R_p(\widehat{XY}) - \sum_{j=1}^{k} \{\langle L_j X, X \rangle \langle L_j Y, Y \rangle - \langle L_j X, Y \rangle^2\},$$

其中 X, Y 为 2 维平面 $\widehat{XY}$ 中的规范正交基.

例 3 在例 1 中，设 N 为 M 的 C^∞ 单位法向量场. $\{u^1, \cdots, u^{n-1}\}$ 为 M 的局部坐标系，$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle$, $L_{ij} = \left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle$

$=\left\langle\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}N,\ \frac{\partial}{u^j}\right\rangle=\frac{\partial}{\partial u^i}\left\langle N,\ \frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle-\left\langle N,\ \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle=\ -\left\langle N,\right.$ $\left.\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle=-\left\langle N, V\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right\rangle$（对照第四章§3从引理8到引理9之间的内容，$\frac{\partial}{\partial u^j}=\frac{\partial x}{\partial u^j}$，$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}=\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\partial u^j}$，$L_{ij}=-\left\langle N,\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\partial u^j}\right\rangle$）

$$L\frac{\partial}{\partial u^i}=\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}N=\sum_{k=1}^{n-1}L_i^k\ \frac{\partial}{\partial u^k},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}=\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial u^k}$$

则 （1）$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\frac{\partial}{\partial u^j}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}-\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle N$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial u^k}-L_{ij}N.$$

（2）$L_{ij}=\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n-1}L_i^k\ \frac{\partial}{\partial u^k},\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle=\sum_{k=1}^{n-1}L_i^k g_{kj}.$

$$\sum_{j=1}^{n-1}L_{ij}g^{js}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}L_i^k g_{kj}g^{js}=\sum_{k=1}^{n-1}L_i^k\left(\sum_{j=1}^{n-1}g_{kj}g^{js}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}L_i^k\delta_k^s=L_i^s,$$ 其中(g^{ij})为(g_{ij})的逆矩阵

（3）$L_{ij}=\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial u^i},\ L\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle=L_{ji}.$

（4）在$p\in M$处，因为(L_{ij})为实对称矩阵，故线性变换L：$T_pM\to T_pM$的特征值$K_1,\cdots,K_{n-1}$都是实数.

（5）我们称$K_G=K_1\cdots K_{n-1}$为M在p点处的**Gauss曲率**，称$H=\frac{K_1+\cdots+K_{n-1}}{n-1}$为$M$在$p$点处的**平均曲率**. 则

$$K_G=K_1\cdots K_{n-1}=\det(L_i^s)=\det(L_{ij}g^{js})=\det(L_{ij}).$$

$$\det(g^{js})=\frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})},$$

$$H=\frac{K_1+\cdots+K_{n-1}}{n-1}=\frac{\mathrm{Trace}(L_i^s)}{n-1}=\frac{\mathrm{Trace}(L_{ij}g^{js})}{n-1}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n-1}L_{ij}g^{js}}{n-1}.$$

例 4 在例 3 中，设 $\tilde{M}=\boldsymbol{R}^n$，则 $\tilde{R}=0$.

(1) Gauss 曲率方程的坐标形式：

$$0=R\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^l}-\left\{\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^l}\right\rangle L\frac{\partial}{\partial u^i}-\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^l}\right\rangle L\frac{\partial}{\partial u^j}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}R_{l\,i\,j}^{k}\frac{\partial}{\partial u^k}-\left\{L_{jl}\sum_{k=1}^{n-1}L_i^k\frac{\partial}{\partial u^k}-L_{il}\sum_{k=1}^{n-1}L_j^k\frac{\partial}{\partial u^k}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\{R_{lij}^k-(L_{jl}L_i^k-L_{il}L_j^k)\}\frac{\partial}{\partial u^k},$$

$$R_{lij}^k=L_{jl}L_i^k-L_{il}L_j^k$$

或 $$\frac{\partial\Gamma_{jl}^k}{\partial u^i}-\frac{\partial\Gamma_{il}^k}{\partial u^j}+\sum_{s=1}^{n-1}(\Gamma_{jl}^s\Gamma_{is}^k-\Gamma_{il}^s\Gamma_{js}^k)=L_{jl}L_i^k-L_{il}L_j^k,$$

$i,j,k,l=1,\cdots,n-1.$

(2) Codazzi-Mainardi 方程的坐标形式：

$$0=-\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}L\frac{\partial}{\partial u^j}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}L\frac{\partial}{\partial u^i}-L\left[\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right],\frac{\partial}{\partial u^l}\right\rangle N$$

$$=\left\{-\frac{\partial}{\partial u^i}\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^l}\right\rangle+\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^j},\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^l}\right\rangle+\frac{\partial}{\partial u^j}\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^l}\right\rangle-\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\frac{\partial}{\partial u^l}\right\rangle\right\}N$$

$$=\left\{-\frac{\partial L_{jl}}{\partial u^i}+\frac{\partial L_{il}}{\partial u^j}+\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^j},\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{il}^k\frac{\partial}{\partial u^k}\right\rangle-\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{jl}^k\frac{\partial}{\partial u^k}\right\rangle\right\}N=\left\{-\frac{\partial L_{jl}}{\partial u^i}+\frac{\partial L_{il}}{\partial u^j}+\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{il}^k L_{jk}-\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{jl}^k L_{ik}\right\}N,$$

$$\frac{\partial L_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial L_{il}}{\partial u^j}-\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{i}^{kl}L_{jk}+\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{jl}^{k}L_{ik}=0,i,j,l=1,\cdots,n-1.$$

(3) $$\det\begin{pmatrix}L_{ir} & L_{il}\\ L_{jr} & L_{jl}\end{pmatrix}=L_{ir}L_{jl}-L_{il}L_{jr}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}g_{kr}(L_{jl}L_i^k-L_{il}L_j^k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}g_{kr}R_{lij}^k=\sum_{k=1}^{n-1}g_{kr}\left\{\frac{\partial\Gamma_{jl}^k}{\partial u^i}-\frac{\partial\Gamma_{il}^k}{\partial u^i}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n-1}(\Gamma_{jl}^s\Gamma_{is}^k-\Gamma_{il}^s\Gamma_{js}^k)\right\}.$$

(4) $$\det\begin{pmatrix}L_i^l & L_j^l\\ L_i^r & L_j^r\end{pmatrix}=L_i^lL_j^r-L_j^lL_i^r=\sum_{k=1}^{n-1}g^{kr}(L_{jk}L_i^l-L_{ik}L_j^l)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}g^{kr}R_{kij}^l=\sum_{k=1}^{n-1}g^{kr}\left\{\frac{\partial\Gamma_{jk}^l}{\partial u^i}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}+\right.$$

$$\left.\sum_{s=1}^{n-1}(\Gamma_{jk}^s\Gamma_{is}^l-\Gamma_{ik}^s\Gamma_{js}^l)\right\}.$$

定理 2 （**Gauss 定理**） 设 M 为 $\widetilde{M}=\mathbf{R}^n$（$n$ 为奇数）中的 $n-1$ 维 C^∞ Riemann 正则子流形，则 M 的 Gauss 曲率 K_G 由 M 的第 I 基本形式完全确定，而与 M 相对于它的外围空间 $\widetilde{M}$ 的第 II 基本形式无关.

证明 从表面上看，$K_G=\dfrac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}$ 既与 g_{ij}（第 I 基本形式）有关，又与 L_{ij}（第 II 基本形式）有关. 但如果应用行列式的 Laplace 展开可得到

$$\det(L_{ij})=\Sigma\pm\begin{vmatrix}L_{ik} & L_{il}\\ L_{jk} & L_{jl}\end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix}L_{su} & L_{sv}\\ L_{tu} & L_{tv}\end{vmatrix}.$$

从例4(3)知$\begin{vmatrix} L_{ik} & L_{il} \\ L_{jk} & L_{jl} \end{vmatrix}$可用$g_{ij}$及其导数(注意$\Gamma_{ij}^{k}$可用$g_{ij}$及其导数表示)表示. 所以,$K_G$由$M$的第Ⅰ基本形式完全确定. #

定理 3 设M为$\widetilde{M}=\mathbf{R}^n$的$n-1$维$C^\infty$ Riemann 正则子流形. N为M的C^∞单位法向量场, 即$N: M\to S^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$为$C^\infty$映射(称为$M$的 **Gauss 映射**), 则

$$K_G=\det N_*,$$

其中$N_*: TM\to TS^{n-1}$, T_xM和$T_{N(x)}S^{n-1}$视作相同的向量空间.

证明 设$\{u^1,\cdots,u^{n-1}\}$为M的局部坐标系,则

$$\begin{pmatrix} N_*\dfrac{\partial}{\partial u^1} \\ \vdots \\ N_*\dfrac{\partial}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial N}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L\dfrac{\partial}{\partial u^1} \\ \vdots \\ L\dfrac{\partial}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_1^1 & \cdots & L_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n-1}^1 & \cdots & L_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$K_G=\det(L_i^s)=\det N_*, \quad \#$$

定理 4 设M为$\widetilde{M}=\mathbf{R}^3$的2维$C^\infty$定向紧致 Riemann 正则子流形. 则存在$p\in M$, 使得$K_G(p)>0$.

证明 1 设$r: R^3\to R$, $r(x)=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\|x\|$. $I: M\to\mathbf{R}^3$为包含映射. 则紧致流形M上的连续函数$r\circ I$必在点$p\in M$达最大值. 通过R^3的一个旋转(正交变换),可以假定p在x^3轴上(不改变Gauss 曲率). 设N为M上的C^∞单位法向量场. σ为M上的C^∞曲线, $\sigma(0)=p$, $I\circ\sigma(t)=(x^1(t),x^2(t),x^3(t))$. 因为$x^3(0)=r\circ I(p)\geqslant r\circ I(\sigma(t))\geqslant x^3(t)$, 故$\dfrac{dx^3}{dt}(0)=0$. $(I\circ\sigma)'(0)=T_{I\circ\sigma}(0)=$

$$\left(\frac{dx^1}{dt}(0),\frac{dx^2}{dt}(0),0\right), N(p)=(0,0,1).$$

设X为线性变换L在T_pM上的以λ为特征值的单位特征向量, 即$LX=\widetilde{\nabla}_XN=\lambda X$. 如果$I\circ\sigma$在$\sigma(0)=p$切于$X$, 即$X=$

$(I\circ\sigma)'(0)=T_{I\circ\sigma}(0)=\left(\frac{dx^1}{dt}(0),\frac{dx^2}{dt}(0),\frac{dx^3}{dt}(0)\right)=\left(\frac{dx^1}{dt}(0),\ \frac{dx^2}{dt}\right.$ $\left.(0),\ 0\right)$. 由 Gauss 公式（X 延拓为 $(I\circ'\sigma)(t)$, $\widetilde{\nabla}_X X$ 理解为 $\nabla_{(I\circ\sigma)'}(I\circ\sigma)'|_{t=0}$）

$$\left(\frac{d^2x^1}{dt^2}(0),\frac{d^2x^2}{dt^2}(0),\frac{d^2x^3}{dt^2}(0)\right)=\widetilde{\nabla}_X X=\nabla_X X-\langle LX,\ X\rangle N$$

$$=\nabla_X X-\langle\lambda X,X\rangle N=\nabla_X X-(0,0,\lambda),$$

$$\lambda=-\frac{d^2x^3}{dt^2}(0).$$

（反证）如果 $\lambda<0$, 则 $\frac{d^2x^3}{dt^2}(0)>0$, 对充分小的 $|t|$ 有 $x^3(t)-x^3(0)=\frac{dx^3}{dt}(0)t+\frac{d^2x^3}{dt^2}(0)t^2+o(t^3)=\left[\frac{d^2x^3}{dt^2}(0)+o(t)\right]t^2>0$, 这与 $x^3(0)$ 为最大值相矛盾.

因为 L 自共轭，故特征值都为实数，记为 K_1,K_2，由上证明 $K_1>0,K_2>0$. 于是, $K_G(p)=K_1K_2>0$.

证明 2 如同证明 1, $r\circ I$ 在 $p\in M$ 达最大值, p 在 x^3 轴上. 设 $\{u^1,u^2\}$ 为 $p\in M$ 的局部坐标系, $(x^1(0,0),x^2(0,0),x^3(0,0))=p$, 从

$$2=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\end{pmatrix}_{(0,0)}$$

$$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}(0,0) & \frac{\partial x^2}{\partial u^1}(0,0) & 0\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2}(0,0) & \frac{\partial x^2}{\partial u^2}(0,0) & 0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\end{pmatrix}_{(0,0)}$$

推出 $\{x^1,\ x^2\}$ 为 p 的局部坐标系. 令 $(x^1,\ x^2,\ x^3)=(x^1,x^2,\ g(x^1,x^2))$, 则 g 在 $(0,0)$ 达最大值, 故 $\frac{\partial g}{\partial x^1}(0,0)=\frac{\partial g}{\partial x^2}(0,0)=0$, 且

$$N=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3}\\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x^1}\\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial x^2}\end{pmatrix}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}-\frac{\partial g}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x^3}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^2}}$$

$$\begin{pmatrix}L_{\frac{\partial}{\partial x^1}}N\\ L_{\frac{\partial}{\partial x^2}}N\end{pmatrix}_{(0,0)}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^1} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x^2\partial x^2}\end{pmatrix}_{(0,0)}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \frac{\partial}{\partial x^2}\end{pmatrix}.$$

（反证） 如果 $K_G(p)=\det\begin{pmatrix}-\frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^1} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x^2\partial x^2}\end{pmatrix}_{(0,0)}<0$,

应用对称实矩阵化为对角形可看出，存在(x_0^1, x_0^2)使得

$$g(x_0^1, x_0)-g(0,0)=\frac{\partial g}{\partial x^1}(0,0)x_0^1+\frac{\partial g}{\partial x^2}(0,0)x_0^2+(x_0^1, x_0^2)\cdot$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2\partial x^2}\end{pmatrix}_{(0,0)}\begin{pmatrix}x_0^1\\ x_0^2\end{pmatrix}+o((x_0^1)^2+(x_0^2)^2)$$

$$=(x_0^1, x_0^2)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^1\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2\partial x^2}\end{pmatrix}_{(0,0)}\begin{pmatrix}x_0^1\\ x_0^2\end{pmatrix}+o((x_0^1)^2+(x_0^2)^2)>0,$$

这与 $g(0,0)$为最大值相矛盾． #

定理 5 设 M 为 $\tilde{M}=\boldsymbol{R}^3$ 的 2 维 C^∞ 定向 Riemann 正则子流形．则 Gauss 曲率和 Riemann 截曲率相等．

证明 设 X_1, X_2 为 TM 的局部 C^∞ 规范正交基向量场. L 为 Weingavten 映射,

$$\begin{pmatrix} LX_1 \\ LX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

则

$$R(\widehat{X_1 X_2}) = \tilde{R}(\widehat{X_1 X_2}) + \langle LX_1, X_1\rangle\langle LX_2, X_2\rangle - \langle LX_1, X_2\rangle^2$$
$$= 0 + \langle L_1^1 X_1 + L_1^2 X_2, X_1\rangle\langle L_2^1 X_1 + L_2^2 X_2, X_2\rangle -$$
$$\langle L_1^1 X_1 + L_1^2 X_2, X_2\rangle^2 = L_1^1 L_2^2 - (L_1^2)^2 = \det\begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{pmatrix} = K_G,$$

其中 $L_1^2 = L_2^1$ 是因为 $L_i^j = \left\langle \sum_{s=1}^{2} L_i^s X_s, X_j \right\rangle = \langle LX_i, X_j\rangle = \langle X_i, LX_j\rangle = \left\langle X_i, \sum_{s=1}^{2} L_j^s X_s \right\rangle = L_j^i$. #

最后,我们给出两个具体的例子.

例 5 $\tilde{M} = R^n$, $M = S^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \left\{ x = (x^1, \cdots, x^n) \in R^n \middle| \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = \frac{1}{c} \right\}$ 为 $n-1$ 维球面, 则 $LX = \tilde{\nabla}_X N = \tilde{\nabla}_X \left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{c}\, x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sqrt{c} \sum_{i=1}^{n} (Xx^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c}\, x^i \tilde{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial x^i} = \sqrt{c}\, X$. 取 X, Y 为 $\widehat{XY}$ 平面上的规范正交基,则

$$R_p(\widehat{XY}) = \tilde{R}_p(\widehat{XY}) + \{\langle LX, X\rangle\langle LY, Y\rangle - \langle LX, Y\rangle^2\}$$
$$= 0 + \{\langle\sqrt{c}\, X, X\rangle\langle\sqrt{c}\, Y, Y\rangle - \langle\sqrt{c}\, X, Y\rangle^2\} = c$$ (常 Riemann 截曲率 $c > 0$).

$$K_G = \det(L_i^s) = \det\begin{pmatrix} \sqrt{c} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{c} \end{pmatrix} = (\sqrt{c})^{n-1},$$

$$H=\frac{\operatorname{Trace}(L_i^s)}{n-1}=\frac{\overbrace{\sqrt{c}+\cdots+\sqrt{c}}^{n-1}}{n-1}=\sqrt{c}.$$

例 6 $\widetilde{M}=\boldsymbol{R}^n$, $M=\left\{x=(x^1,\cdots,x^n)\in\boldsymbol{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1}(x^i)^2=\frac{1}{c}\right\}$为 $n-1$ 维圆柱面，则 $LX=\widetilde{\nabla}_X N=\widetilde{\nabla}_X\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\sqrt{c}\,x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sqrt{c}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(Xx^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sqrt{c}\sum_{i=1}^{n-1}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，其中 $X=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 选 TM 的局部规范正交基为 $X_1,\cdots,X_{n-2},\frac{\partial}{\partial x^n}$，于是，

$$\begin{pmatrix} LX_1\\ \vdots\\ LX_{n-2}\\ L\frac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{c} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{c} & \\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1\\ \vdots\\ X_{n-2}\\ \frac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix},$$

$$K_G=\det\begin{pmatrix}\sqrt{c} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{c} & \\ & & & 0\end{pmatrix}=0,$$

$$H=\frac{\overbrace{\sqrt{c}+\cdots+\sqrt{c}}^{n-2}+0}{n-1}=\frac{n-2}{n-1}\sqrt{c}.$$

注意，$M(n\geqslant 4)$ 不是常 Riemann 截曲率的 C^∞ 流形. 例如：

$$R_p(X_1\widehat{\ }X_2)=\widetilde{R}_p(X_1\widehat{\ }X_2)+\{\langle LX_1,X_1\rangle\langle LX_2,X_2\rangle-\langle LX_1,X_2\rangle^2\}=0+\{\langle\sqrt{c}\,X_1,X_1\rangle\langle\sqrt{c}\,X_2,X_2\rangle-\langle\sqrt{c}\,X_1,X_2\rangle^2\}=c>0,$$

$$R_p\left(\widehat{X_1\frac{\partial}{\partial x^n}}\right)=\tilde{R}_p\left(\widehat{X_1\frac{\partial}{\partial x^n}}\right)+\left\{\langle LX_1, X_1\rangle\left\langle L\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle-\left\langle LX_1, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle^2\right\}=0+\left\{\langle\sqrt{c}\,X_1, X_1\rangle\left\langle 0, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle-\left\langle\sqrt{c}\,X_1, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\rangle^2\right\}=0\neq c=R_p(\widehat{X_1X_2}).$$

注1 对 C^∞ 曲线 σ 可以定义能量泛函 $E(\sigma)$，能量泛函的临界点即为测地线. 对 C^∞ 正则子流形 M 可以定义能量泛函 $E(M)$，能量泛函的临界点即为极小子流形. 一般地, 对 C^∞ 映射 f: $M\to N$ 可以定义能量泛函 $E(f)$, 能量泛函的临界点称为调和映射. 详细内容可参阅[Eells, J. and Lemaire, L.].

§5 Lie导数L_X、散度 div 和 Laplace 算子Δ

本节主要讨论 C^∞ 向量场的散度和 C^∞ 函数的 Laplace 及其有关的性质.

定义 1 设 V 为 n 维实向量空间, $\otimes^{0,s}V$ 为 V 上的$(0,s)$型张量的全体. 对于 $v\in V,\theta\in\otimes^{0,s}V$, 称 i_v: $\otimes^{0,s}V\to\otimes^{0,s-1}V$, $i_v\theta(v_1,\cdots,v_{s-1})=\theta(v,v_1,\cdots,v_{s-1})$, $v_1,\cdots,v_{s-1}\in V$ 为由 v 确定的**内导数**. 注意, 如果 $\theta\in\otimes^{0,0}V=\mathbf{R}$, 定义 $i_v\theta=0$.

引理 1 (1) 设 $v_1,v_2,v\in V,\lambda\in\mathbf{R},\theta,\eta\in\otimes^{0,s}V$, 则

$$i_v(\theta+\eta)=i_v\theta+i_v\eta,\quad i_v(\lambda\theta)=\lambda i_v\theta,$$

$$i_{v_1+v_2}=i_{v_1}+i_{v_2},\qquad i_{\lambda v}=\lambda i_v;$$

(2) 设 $v\in V,\theta\in\wedge^rV^*,\eta\in\wedge^sV^*$, 则$i_v\theta\in\wedge^{r-1}V^*$, $i_v\eta\in\wedge^{s-1}V^*$; 且 $i_v(\theta\wedge\eta)=(i_v\theta)\wedge\eta+(-1)^r\theta\wedge(i_v\eta)$.

(3) 设 $v\in V,\theta\in\wedge^rV^*$, 则$i_v^2\theta=0$.

证明 (1) 由i_v 的定义立即推出.

(2) 由 θ 的反称性知 $i_v\theta$ 也具有反称性, 故 $i_v\theta\in\wedge^rV^*$, $i_v\eta\in$

$\wedge^{s-1}V^*$. 对 r 应用归纳法可证

$$i_v(\theta\wedge\eta)=(i_v\theta)\wedge\eta+(-1)^r\theta\wedge(i_v\eta).$$

事实上，当 $k=1$ 时，即 $i_v(\lambda\wedge\eta)=\lambda i_v\eta=(i_v\lambda)\wedge\eta+(-1)^0\lambda\wedge(i_v\eta)$. 假设 $k=r-1$ 时公式成立，则对 $k=r$ 时公式也成立. 事实上，由 i_v 的线性性，只须证

$$\begin{aligned}
&i_v((\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_r)\wedge\eta)=i_v((\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{r-1})\wedge(\theta_r\wedge\eta))\\
&=i_v(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{r-1})\wedge(\theta_r\wedge\eta)+(-1)^{r-1}(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{r-1})\wedge i_v(\theta_r\wedge\eta)\\
&=i_v(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{r-1})\wedge\theta_r\wedge\eta+(-1)^{r-1}(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{r-1})\wedge(i_v\theta_r\wedge\eta\\
&\quad-\theta_r\wedge i_v\eta)\\
&=[i_v(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{r-1})\wedge\theta_r+(-1)^{r-1}(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{r-1})\wedge i_v\theta_r]\wedge\eta\\
&\quad+(-1)^r(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_r)\wedge i_v\eta\\
&=i_v(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_r)\wedge\eta+(-1)^r(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_r)\wedge i_v\eta.
\end{aligned}$$

(3) $i_v^2\theta(v_1,\cdots,v_{r-2})=i_v\theta(v,v_1,\cdots,v_{r-2})=\theta(v,v,v_1,\cdots,v_r)=0$. #

设 M 为 n 维 C^∞ 流形，$X\in C^\infty(TM)$，令

$$i_X:\ C^\infty(\otimes^{0,s}TM)\to C^\infty(\otimes^{0,s-1}TM),$$

$$\theta\mapsto i_X\theta,\quad \theta_p\mapsto(i_X\theta)_p=i_{X_p}\theta_p,\ p\in M,$$

$$i_X\theta=0,\ \theta\in C^\infty(\wedge^0T^*M)=C^\infty(M,\mathbf{R}),$$

$$i_X\theta(X_1,\cdots,X_{s-1})=\theta(X,X_1,\cdots,X_{s-1}),\ \theta\in C^\infty(\wedge^sT^*M),$$

$X_1,\cdots,X_{s-1}\in C^\infty(TM)$. 由第三章 §1 定理 5 和 θ 的反称性知若 $\theta\in C^\infty(\wedge^sT^*M)$，则 $i_X\theta\in C^\infty(\wedge^{s-1}T^*M)$.

引理 2 (1) 设 X_1, X_2, $X\in C^\infty(TM)$, $f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$, θ, $\eta\in C^\infty(\otimes^{0,s}TM)$，则

$$i_X(\theta+\eta)=i_X\theta+i_X\eta,\quad i_X(f\theta)=fi_X\theta,$$

$$i_{X_1+X_2}=i_{X_1}+i_{X_2},\qquad i_{fX}=fi_X;$$

(2) 设 $X\in C^\infty(TM)$, $\theta\in C^\infty(\wedge^rT^*M)$, $\eta\in C^\infty(\wedge^sT^*M)$，则 $i_X\theta\in C^\infty(\wedge^{r-1}T^*M)$, $i_X\eta\in C^\infty(\wedge^{s-1}T^*M)$，且

$$i_X(\theta\wedge\eta)=(i_X\theta)\wedge\eta+(-1)^r\theta\wedge(i_X\eta);$$

(3) 设 $X\in C^\infty(TM)$, $\theta\in C^\infty(\wedge^s T^*M)$, 则 $i_X^2\theta=0$.

证明 由引理 1 推出. #

定义 2 设 M 为 n 维 C^∞ 流形, $X\in C^\infty(TM)$. 令

L_X: $C^\infty(\otimes^{r,s}TM)\to C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, $\theta\mapsto L_X\theta$.

(1) $L_Xf=Xf$, $f\in C^\infty(M,\mathbf{R})=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$;

(2) $L_XY=[X,Y]$, $Y\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$;

(3) $(L_X\theta)\ (Y)=X\theta(Y)-\theta([X,\ Y])=X\theta(Y)-\theta(L_XY)$, $\theta\in C^\infty(T^*M)=C^\infty(\otimes^{0,1}TM)$, $Y\in C^\infty(TM)$;

(4) $(L_X\theta)(W_1,\cdots,W_r;\ Y_1,\cdots,Y_s)=L_X(\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s))-\sum_{i=1}^{r}\theta(W_1,\cdots,\ W_{i-1},\ L_XW_i,\ W_{i+1},\ \cdots,\ W_r;Y_1,\ \cdots,\ Y_s)-\sum_{j=1}^{s}\theta(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,\ Y_{j-1},\ L_XY_j,\ Y_{j+1},\ \cdots,Y_s)$, $\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, $W_i\in C^\infty(T^*M)=C^\infty\ (\otimes^{0,1}TM)$, $Y_j\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$. 我们称 $L_X\theta$ 为 θ 关于 X 的 **Lie 导数**, 称 L_X 为由 X 确定的 **Lie 导数**.

引理3 (1) $L_Xf\in C^\infty(M,\mathbf{R})=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$, $L_XY\in C^\infty(TM)=C^\infty(\otimes^{1,0}TM)$. $L_X\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, 其中 $f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$, $X,Y\in C^\infty(TM)$, $\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$;

(2) L_X: $C^\infty(\wedge^sT^*M)\to(\wedge^sT^*M)$;

(3) $L_X(\theta+\eta)=L_X\theta+L_X\eta$, $\theta,\ \eta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$;

(4) $L_X(\theta\otimes\eta)=(L_X\theta)\otimes\eta+\theta\otimes L_X\eta$, $\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s}TM)$, $\eta\in C^\infty(\otimes^{h,t}TM)$(导性);

(5) $L_X(\alpha\wedge\beta)=(L_X\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge L_X\beta$, $\alpha\in C^\infty(\wedge^rT^*M)$, $\beta\in C^\infty(\wedge^sT^*M)$;

(6) $L_X\circ C_j^i=C_j^i\circ L_X$.

证明 (1)—(5)类似于 § 3 引理 2 的证明.

为证明(6)，只须取 $e^k=dx^k$, $e_k=\frac{\partial}{\partial x^k}$. 于是，

$$(L_X dx^k)\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)=X dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)-dx^k\left(L_x\frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$=X\delta_l^k-dx^k\left[\sum_m a^m\frac{\partial}{\partial x^m},\frac{\partial}{\partial x^l}\right]$$

$$=dx\left(\sum_m\frac{\partial a^m}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^m}\right)=\sum_m\frac{\partial a^m}{\partial x^l}\delta_m^k=\frac{\partial a^t}{\partial x^l},$$

$$L_X{}^{dx^k}=\sum_l\frac{\partial a^k}{\partial x^l}dx^l.$$

又因 $L_x\frac{\partial}{\partial x^k}=\left[\sum_l a^l\frac{\partial}{\partial x^L},\frac{\partial}{\partial x^k}\right]=-\sum_l\frac{\partial a^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}$, 故

$$\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},L_X{}^{dx^k},W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,$$
$$Y_{j-1},\frac{\partial}{\partial x^k}Y_j,\cdots,Y_{s-1}),=\sum_l\frac{\partial a^k}{\partial x^l}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},$$
$$dx^l,\ W_i,\ \cdots,\ W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},\frac{\partial}{\partial x^k}Y_j,\cdots,Y_{s-1}),$$

$$\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},dx^k,\ W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},$$
$$L_x\frac{\partial}{\partial x^k},Y_j,\cdots,Y_{s-1})=-\sum_l\frac{\partial a^l}{\partial x^k}\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},$$
$$dx^k,W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},\frac{\partial}{\partial x^l},Y_j,\cdots,Y_{s-1}),$$

$$\sum_k[\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},L_X{}^{dx^k},W_i,\cdots,W_{r-1};Y_1,$$
$$\cdots,Y_{j-1},\frac{\partial}{\partial x^k},Y_j,\cdots,Y_{s-1})+\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},dx^k,$$
$$W_i,\cdots,\ W_{r-1};Y_1,\cdots,Y_{j-1},\ L_X\frac{\partial}{\partial x^k},Y_j,\cdots,Y_{s-1})]=0.$$

再类似于§3引理2(7)得到 $L_X\circ C^i_j=C^i_j\circ L_X$.　＃

注1　由[Gallot, S., Hulin D. and Lafontaine, J., p37],

$L_X\theta=\frac{d}{dt}(\phi_t^*\theta)|_{t=0}$ 有 $L_X\circ C^i_j\theta=\frac{d}{dt}(\phi_t^*C^i_j\theta)|_{t=0}=C^i_j\frac{d}{dt}(\phi_t^*\theta)|_{t=0}$

$=C^i_j\circ L_X\theta$.

定理1　设 M 为 n 维 C^∞ 流形，$X\in C^\infty(TM)$，则 $L_X=d\circ i_X+i_X\circ d$，即对任何 $\omega\in C^\infty(\wedge^sT^*M)$，有 $L_X\omega=(d\circ i_X+i_X\circ d)\omega$.

证明　如果 $f\in C^\infty(M,R)=C^\infty(\otimes^{0,0}TM)$，则

$(d\circ i_X+i_X\circ d)f=d(i_Xf)+i_X(df)=0+df(X)=Xf=L_Xf$,

$L_X=d\circ i_X+i_X\circ d=i_X\circ d$.

如果 $\omega\in C^\infty(\wedge^sT^*M)$，则

$$(i_X\circ d\omega)(X_1,\cdots,X_s)=i_X(d\omega)(X_1,\cdots,X_s)=d\omega(X,X_1,\cdots,X_s)$$

$$=\left\{X(\omega(X_1,\cdots,X_s))+\sum_{j=1}^{s}(-1)^{1+j+1}\omega([X,X_j],\hat{X},\ X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_s)\right\}$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{s}(-1)^iX_i(\omega(X,X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_s))+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X,X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_s)\right\}$$

$$=(L_X\omega-d\circ i_X\omega)(X_1,\cdots,X_s),$$

$i_X\circ d=L_X-d\circ i_X$,

$L_X=d\circ i_X+i_X\circ d$.　＃.

定义3　设 M 为 n 维 C^∞ 定向仿紧流形，Ω 为 M 上的处处非0的 n 阶 C^∞ 微分形式(由定向、仿紧，这样的 Ω 总存在)，它也称为 M 的体积元素，$X\in C^\infty(TM)$. 令

$L_X\Omega=(\mathrm{div}X)\Omega$,

其中 $\mathrm{div}X\in C^\infty(M,R)$ 称为 C^∞ 切向量场 X 关于体积元素 Ω 的散

度. 特别地,如果 $\Omega=dV$ 为由M的 Riemann 度量 g 确定的体积元素（由$(e^1\wedge\cdots\wedge e^n)(e_1,\cdots,e_n)=1\neq0$ 知 $\Omega=dV=e^1\wedge\cdots\wedge e^n$ 为M上的处处非 0 的 n 阶 C^∞微分形式,其中$\{e^k\}$为(M,g)上局部规范正交基向量场$\{e_k\}$的对偶基),则称 $\mathrm{div}X$ 为 C^∞ 切向量场 X 关于 Riemann 度量 g 的散度.

定理 2 (Green)设M为n维C^∞定向仿紧流形,Ω为M的体积元素, $U\subset M$为开集, $\bar{U}$紧致且 ∂U 为M的 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形或 $\varnothing$, X为M上的 C^∞ 切向量场. 则

$$\int_U \mathrm{div}X\cdot\Omega=\int_{\partial U} I^*(i_X\Omega),$$

其中 $I:\partial U\to M$ 为包含映射. 如果 $\mathrm{supp}X$ 紧致, 特别当M紧致时 $(\bar{U}=M,\partial U=\varnothing)$, 有$\int_M \mathrm{div}X\cdot\Omega=0$.

证明 由 Stokes 定理和 $d\Omega=0$, 有

$$\int_U \mathrm{div}X\cdot\Omega=\int_U L_X\Omega=\int_U(d\circ i_X+i_X\circ d)\Omega=\int_U d(i_X\Omega)$$

$$=\int_{\partial U} I^*(i_X\Omega).$$

如果 $\mathrm{Supp}X$ 紧致, 取开集 U 使得 $\mathrm{Supp}X\subset U$, 故$I^*(i_X\Omega)|_{\partial U}=0$. 于是, $\int_U \mathrm{div}X\cdot\Omega=\int_{\partial U} I^*(i_X\Omega)=0$. #

注 2 如果 X 有紧致支柱, 则它有整体 1 参数群 φ_t. 利用 $L_X\Omega=\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\Omega)|_{t=0}=-\frac{d}{dt}(\varphi_t^{-1*}\Omega)|_{t=0}$ 和$\int_M\varphi_t^{-1*}\Omega=\int_M\Omega$, 有

$$0=\frac{d}{dt}\left(\int_M \varphi_t^{-1*}\Omega\right)\Big|_{t=0}=\int_M\frac{d}{dt}(\varphi_t^{-1*}\Omega)|_{t=0}=-\int_M L_X\Omega$$

$$=-\int_M \mathrm{div}X\cdot\Omega,$$

于是,
$$\int_M \mathrm{div}X\cdot\Omega=0.$$

定义 4 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为 n 维C^∞Riemann流形，我们称$\Delta: C^\infty(M,\mathbf{R})\to C^\infty(M,\mathbf{R})$， $f\mapsto\Delta f=\text{div grad}f$ 为(M,g)的 **Laplace 算子**.

如果 $\Delta f=0$，则称 f 为M上的**调和函数**.

定理 3 设$(M,g)=(M,\langle\ ,\ \rangle)$为 n 维 C^∞ 定向 Riemann 流形，$U\subset M$ 为开集，$\bar{U}$ 紧致且∂U 为M的 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形或 $\varnothing$，$f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，$\Omega=dV$ 为由 g 确定的体积元素，则

$$\int_U \Delta f dV=\int_U \text{div grad}f dV=\int_{\partial U} I^*(i_{\text{grad}f}dV),$$

如果Supp$f$ 紧致，特别当M紧致时，$\int_M \Delta f dV=0$.

证明 由定理 2 可得到结论.

定理 4 设$(M,g)=(M,\langle\ ,\ \rangle)$为 n 维 C^∞ 定向 Riemann 流形，$\{x^i\}$为M的局部坐标系，$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}$与$M$的定向一致，则在此局部坐标系中，

$$\text{div}X=\sum_{i=1}^n\frac{\partial a^i}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial\ln\det(g_{kl})}{\partial x^i},\ X=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

和

$$\Delta f=\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}+\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial\ln\det(g_{kl})}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

证明 因为$\left[X,\frac{\partial}{\partial x^i}\right]=\left[\sum_{j=1}^n a^j\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right]=-\sum_{j=1}^n\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$,

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)=\sqrt{\det(g_{kl})}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$
$$=\sqrt{\det(g_{kl})}\,,$$

故

$$(\mathrm{div}X)\sqrt{\det(g_{kl})} = (\mathrm{div}X)\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

$$= (L_X\Omega)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

$$= X\left(\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right) - \sum_{i=1}^{n}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \left[X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right], \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

$$= X\sqrt{\det(g_{kl})} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x^j},\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^{i+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial\sqrt{\det(g_{kl})}}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^i}\sqrt{\det(g_{kl})},$$

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial \ln\det(g_{kl})}{\partial x^i}.$$

如果令 $X = \mathrm{grad} f = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$代入上式得到

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} + \frac{1}{2} g^{ij}\frac{\partial \ln\det(g_{kl})}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

#

注 3 如果 $M = \boldsymbol{R}^n$, $\{x^i\}$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的通常的整体直角坐标系, $g_{ij} = g^{ij} = \delta^i_j$, $\det(g_{ij}) = \det(\delta^i_j) = 1$, 则

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^i},$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}.$$

注 4 当 Riemann 流形$(M, g) = (M, \langle, \rangle)$可定向时, 利用体

积元素定义了 $\mathrm{div}X$ 和 Δf. 如果M不可定向，则可用上述 $\mathrm{div}X$ 和 Δf 的坐标形式分别作为它们的定义，并通过直接计算验证其定义与局部坐标系的选取无关.

定理 5 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为 n 维 C^∞ 紧致连通定向 Riemann 流形，则M上的任何调和函数是常值函数.

证明 因为

$$\Delta f^2=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f^2}{\partial x^i \partial x^j}+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}+\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial \ln\det(g_{kl})}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f^2}{\partial x^j}$$

$$=2f\Delta f+2\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

$$=2f\Delta f+2\sum_{s,t=1}^{n} g_{st}\left(\sum_{i=1}^{n} g^{si}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} g^{tj}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

$$=2f\Delta f+2\|\mathrm{grad} f\|^2,$$

故当 f 为调和函数时，$\Delta f=0$, 因而 $\Delta f^2=2\|\mathrm{grad} f\|^2$. 再由定理 3 得到

$$\int_M \|\mathrm{grad} f\|^2 dV=\frac{1}{2}\int_M \Delta f^2 dV=0.$$

于是, $\|\mathrm{grad} f\|\equiv 0$, 且在局部坐标系中,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\equiv 0,$$

这等价于

$$\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\equiv 0,\ j=1,\cdots,n,$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}\equiv 0,\quad j=1,\cdots,n.$$

再由M连通，f必为常值函数. #

下面我们从另一方式引进 div 和 Δ.

定义 5 设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞Riemann 流形. 令

$$\widetilde{\nabla}:\ C^\infty(\otimes^{r,s}TM)\to C^\infty(\otimes^{r,s+1}TM),$$

$$\theta\to\widetilde{\nabla}\theta,$$

使得

$$(\widetilde{\nabla}\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_{s+1})$$
$$=(\nabla_{Y_{s+1}}\theta)(W_1,\cdots,W_r;Y_1,\cdots,Y_s),$$

其中$W_i\in C^\infty(T^*M)$, $Y_j\in C^\infty(TM)$. 显然$\widetilde{\nabla}\theta\in C^\infty(\otimes^{r,s+1}TM)$,则称$\widetilde{\nabla}$为由$\nabla$诱导的**一般协变导数算子**. 而

$$\text{div}:\ C^\infty(\otimes^{r,s}TM)\to C^\infty(\otimes^{r-1,s}TM),\quad \text{div}=C^r_{s+1}\circ\widetilde{\nabla}$$

称为**散度**, $\Delta=\text{div grad}$ 称为 **Laplace 算子**.

显然$\widetilde{\nabla}$为线性算子，且由$\nabla_X\circ C^i_j=C^i_j\circ\nabla_X$知$\widetilde{\nabla}\circ C^i_j=C^i_j\circ\widetilde{\nabla}$. 因为

$$\frac{\partial\det(g_{kl})}{\partial x^i}=\sum_{m,r=1}^n G_{mr}\frac{\partial g_{mr}}{\partial x^i}=\sum_{m,r=1}^n G_{mr}\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i},$$

其中G_{mr}为g_{mr}的代数余子式，故

$$\sum_{m=1}^n\Gamma^m_{mi}=\frac{1}{2}\sum_{m,r=1}^n g^{mr}\left(\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^r}\right)=\frac{1}{2}\sum_{m,r=1}^n g^{mr}\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m,r=1}^n\frac{G_{mr}}{\det(g_{kl})}\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i}=\frac{1}{2\det(g_{kl})}\frac{\partial\det(g_{kl})}{\partial x^i}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\det(g_{kl})}{\partial x^i}$$

和

$$\operatorname{div}X = C_1^1\cdot\widetilde{\nabla}X = \sum_{m=1}^{n}\widetilde{\nabla}X\left(dx^m, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) = \sum_{m=1}^{n}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}}X)(dx^m)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} dx^m\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}}\sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} dx^m\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} a^i\,\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$= \sum_{m,i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^m}\delta_i^m + \sum_{m,i=1}^{n} a^i dx^m\left(\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{mi}^l\frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \sum_{m,i,l=1}^{n} a^i\Gamma_{mi}^l\delta_l^m = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} a^i\left(\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{mi}^m\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial \ln\det(g_{kl})}{\partial x^i}.$$

定理 6 设$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为 n 维C^∞Riemann流形，$f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，则 $\Delta f=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\nabla}^2 f(e_k,e_k)$，其中$\{e_k\}$为$(M,g)$的局部 C^∞ 规范正交基.

证明 设 $X\in C^\infty(TM)$，则$\widetilde{\nabla}f(X)=\nabla_X f=Xf=df(X)$，即 $\widetilde{\nabla}f=df$. 于是，

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\nabla}^2 f(e_k,e_k) = \sum_{k=1}^{n}\widetilde{\nabla}df(e_k,e_k) = \sum_{k=1}^{n}\widetilde{\nabla}df\left(\sum_{i=1}^{n}b_k^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^{n}b_k^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= \sum_{k,i,j=1}^{n} b_k^i b_k^j\,\widetilde{\nabla}df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}df)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - df\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\sum_{i,j,s=1}^{n} g^{ij}\Gamma_{ji}^{s}\frac{\partial f}{\partial x^s}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i,j,r=1} g^{ij}g^{sr}\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} g^{s,r}\frac{\partial \ln\det(g_{kl})}{\partial x^r}\right)\frac{\partial f}{\partial x^s}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{j,s=1}^{n}\frac{\partial g^{sj}}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^s}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{n} g^{sr}\frac{\partial \ln\det(g_{kl})}{\partial x^r}\frac{\partial f}{\partial x^s}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}+\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial \ln\ \det(g_{kl})}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}=\Delta f,$$

其中

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_k^i b_l^j g_{ij}=\left\langle\sum_{i=1}^{n} b_k^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{j=1}^{n} b_l^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\langle e_k, e_l\rangle=\begin{cases}1, & k=l,\\ 0, & k\neq l,\end{cases}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^i b_k^j=g^{ij};$$

$$\sum_{i,r=1}^{n} g^{ij}g^{sr}\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j}=\sum_{i,r=1}^{n} g^{sr}\left(\frac{\partial(g^{ij}g_{ir})}{\partial x^j}-\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j}g_{ir}\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{n} g^{sr}\frac{\partial \delta_r^j}{\partial x^j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j}\delta_i^s=-\frac{\partial g^{sj}}{\partial x^j}$$

和

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\Gamma_{ji}^{s}=\frac{1}{2}\sum_{i,j,r=1}^{n} g^{ij}g^{sr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right)$$

$$=\sum_{i,j,r=1}^{n} g^{ij}g^{sr}\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j}-\frac{1}{2}\sum_{i,j,r=1}^{n} g^{ij}g^{sr}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}$$

$$=\sum_{i,j,r=1} g^{ij}g^{sr}\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j}-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{sr}\frac{\partial \ln\det(g_{kl})}{\partial x^r}. \quad \#$$

定理 7 设(M,g)为n维C^∞Riemann 流形，$f\in C^\infty(M,R)$，则$\widetilde{\nabla}^2 f\in C^\infty(\odot^2 T^*M)$，其中$\odot^s T^*M$为$TM$上对称$s$阶协变张量从.

证明 因为

$$\widetilde{\nabla}^2 f(X,Y)-\widetilde{\nabla}^2 f(Y,X)=\widetilde{\nabla}(df)(X,Y)-\widetilde{\nabla}(df)(Y,X)$$

$$=(\nabla_Y df)(X)-(\nabla_X df)(Y)$$

$$=Y(df(X))-df(\nabla_Y X)-X(df(Y))+df(\nabla_X Y)$$

$$=(YX-XY)f+(\nabla_X Y-\nabla_Y X)f=-[X,Y]f+[X,Y]f=0,$$

故$\widetilde{\nabla}^2 f(X,Y)=\widetilde{\nabla}^2 f(Y,X)$，即$\widetilde{\nabla}^2 f\in C^\infty(\odot^2 T^*M)$. #

注 5 由定理 5，我们可以用$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\nabla}^2 f(e_k,e_k)$定义$\nabla f$，从证明中的结果知道，它与局部$C^\infty$规范正交基$\{e_k\}$的选取无关，都等于

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i}+\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial \ln\ \det(g_{kl})}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

但也可直接从

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\nabla}^2 f(\bar{e}_k,\bar{e}_k)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\nabla}^2 f\left(\sum_{j=1}^{n}c_{kj}e_j,\sum_{s=1}^{n}c_{ks}e_s\right)$$

$$=\sum_{k,j,s=1}^{n}c_{kj}c_{ks}\widetilde{\nabla}^2 f(e_j,e_s)=\sum_{j,s=1}^{n}\delta_s^j\widetilde{\nabla}^2 f(e_j,e_s)=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\nabla}^2 f(e_j,e_j)$$

看出它与局部 C^∞ 规范正交基 $\{e_k\}$ 的选取无关，其中 $\{\bar{e}_k\}$ 为另一局部 C^∞ 规范正交基.

定理 8 设 $(M, g)=(M, \langle,\rangle)$ 为定向 Riemann 流形，$f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，$df=\sum_{i=1}^{n} f_i\omega_i$，其中 $\{\omega_i\}$ 为 (M,g) 的局部 C^∞ 规范正交基向量场 $\{e_i\}$ 的对偶基向量场. 则

(1) 存在唯一的线性算子（称为**星算子**）$*$: $C^\infty(\wedge^s T^*M)\to C^\infty(\wedge^{n-s}T^*M)$ 使得

$$\omega\wedge*\tau=\langle\omega,\tau\rangle dV,\ \omega,\tau\in C^\infty(\wedge^s T^*M);$$

(2) $$*df=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f_i\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{i-1}\wedge\omega_{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega_n,$$

$f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$;

(3) 对任何 $f, h\in C^\infty(M\cup\partial M,\mathbf{R})$，有

$$\int_M f\Delta h dV+\int_M\langle\widetilde{\Delta}f,\widetilde{\Delta}h\rangle dV=\int_{\partial M}f\cdot i_{\mathrm{grad}\,h}dV$$

和 Green 公式

$$\int_M(f\Delta h-h\Delta f)dV=\int_{\partial M}(f\cdot i_{\mathrm{grad}\,h}-h\cdot i_{\mathrm{grad}\,f})dV$$

$$=\int_{\partial M}\left(f\frac{\partial h}{\partial N}-h\frac{\partial f}{\partial N}\right)i_N dV,$$ 其中 N 为沿 ∂M 的 C^∞ 单位法向量场，M，∂M 满足 Stokes 定理中的条件；

(4) 在(3)中，如果 $\partial M=\varnothing$，则

$$\int_M f\Delta h dV+\int_M\langle\widetilde{\Delta}f,\widetilde{\Delta}h\rangle dV=0,$$

$$\int_M f\Delta f dV+\int_M\|\widetilde{\Delta}f\|^2 dV=0,$$

(5) $\int_M\Delta f dV=\int_{\partial M}*df$，$M$，$\partial M$ 满足 Stokes 定理中的条件.

证明 (1) 如果存在线性算子 $*: C^\infty(\wedge^s T^*M)\to C^\infty(\wedge^{n-s}T^*M)$

使得 $\omega\wedge*\tau=\langle\omega,\tau\rangle dV,\ \omega,\tau\in C^\infty(\wedge^s T^*M)$.

取 $\tau=\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s}$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n$ 并令 $*\tau=\sum\limits_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{n-s}\leqslant n}\lambda_{j_1\cdots j_{n-s}}\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_{n-s}}$. 则对 $1\leqslant l_1<\cdots l_s\leqslant n$, 有

$$(-1)^{a_{i_1\cdots i_s}}\lambda_{1\cdots\hat{l}_1\cdots\hat{l}_s\cdots n}dV=(\omega_{l_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{l_s})\wedge\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{n-s}\leqslant n}\lambda_{j_1\cdots j_{n-s}}\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_{n-s}}$$

$$=(\omega_{l_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{l_s})\wedge*(\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s})=\langle\omega_{l_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{l_s},\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s}\rangle dV$$

$$=\begin{cases}s!dV, & (l_1,\cdots,l_s)=(i_1,\cdots,i_s),\\ 0, & (l_1,\cdots,l_s)\neq(i_1,\cdots,i_s),\end{cases}$$

于是,

$$*(\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s})=s!(-1)^{a_{i_1\cdots i_s}}\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_{i_s}\wedge\cdots\wedge\omega_n.$$

反之,按上式定义并线性扩张为$*:C^\infty(\wedge^s T^*M)\to C^\infty(\wedge^{n-s}T^*M)$,且

$$\omega\wedge*\tau=\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s}\right)\wedge*\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n}\tau_{j_1\cdots j_s}\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_s}\right)$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n}}\omega_{i_1\cdots i_s}\tau_{j_1\cdots j_s}((\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s})\wedge*(\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_s}))$$

$$=s!\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}\tau_{i_1\cdots i_s}(\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s})\wedge((-1)^{a_{i_1\cdots i_s}}\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s}\wedge\cdots\wedge\omega_n)$$

$$=\langle\omega,\tau\rangle dV.$$

(2) $$*df=*\left(\sum_{i=1}^n f_i\omega_i\right)=\sum_{i=1}^n f_i*\omega_i$$

$$=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}f_i\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{i-1}\wedge\omega_{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega_n.$$

(3) 因为

$$d(f\cdot i_{\mathrm{grad}h}dV)=f\cdot d(i_{\mathrm{grad}h}dV)+df\wedge i_{\mathrm{grad}h}dV$$

$$=f(di_{\mathrm{grad}h})dV+df(\mathrm{grad}\ h)dV$$

$$=f\mathrm{div\ grad}\ h\cdot dV+\langle df,\ dh\rangle dV=f\Delta h\cdot dV+\langle\widetilde{\nabla}f,\ \widetilde{\nabla}h\rangle dV,$$

其中 $df(\mathrm{grad}\ h)=\left(\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j}$

$$=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i,\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x^j}dx^j\right\rangle$$

$$=\langle df,dh\rangle=\langle\widetilde{\nabla}f,\ \widetilde{\nabla}h\rangle,$$

$$(di_{\mathrm{grad}\ h})dV=(di_{\mathrm{grad}\ h}+i_{\mathrm{grad}\ h}d)dV$$

$$=L_{\mathrm{grad}\ h}dV=\mathrm{div\ grad}\ hdV,$$

所以,由 Stokes 定理得到

$$\int_M f\Delta hdV+\int_M\langle\widetilde{\nabla}f,\ \widetilde{\nabla}h\rangle dV=\int_M d(f\cdot i_{\mathrm{grad}\ h}dV)=\int_{\partial M}f\cdot i_{\mathrm{grad}h}dV$$

和 $$\int_M(f\Delta h-h\Delta f)dV=\left[\int_M f\Delta hdV+\int_M\langle\widetilde{\nabla}f,\ \widetilde{\nabla}h\rangle dV\right]$$

$$-\left[\int_M h\Delta fdV+\int_M\langle\widetilde{\nabla}h,\ \widetilde{\nabla}f\rangle dV\right]$$

$$=\int_{\partial M}(f\cdot i_{\mathrm{grad}\ h}-h\cdot i_{\mathrm{grad}\ f})dV=\int_{\partial M}\left(f\frac{\partial h}{\partial N}-h\frac{\partial f}{\partial N}\right)i_NdV,$$

其中 $i_{\mathrm{grad}\ h}dV(X_1,\cdots,X_{n-1})=dV(\mathrm{grad}\ h,X_1,\cdots,X_{n-1})$

$$=dV\left(\frac{\partial h}{\partial N}N,X_1,\cdots,\ X_{n-1}\right)$$

$=\frac{\partial h}{\partial N}i_NdV,(X_1,\cdots,_{n-1})$, $\{N,X_1,\cdots,X_{n-1}\}$和$\{X_1,\cdots,X_{n-1}\}$分别为 M 和 ∂M 的局部 C^∞ 规范正交基向量场.

(4) 由(3)和$\partial M=\varnothing$,

$$\int_M f\Delta h dV + \int_M \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla} h \rangle dV = 0.$$

(5) 因为

$$\begin{aligned} i_{\text{grad} f} dV(e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_n) &= dV(\text{grad} f, e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots e_n) \\ &= \langle \text{grad } f, e_i \rangle dV(e_i, e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_n) \\ &= (-1)^{i-1} e_i(f) = (-1)^{i-1} df(e_i) \\ &= *df(e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_n), \end{aligned}$$

所以

$$i_{\text{grad} f} dV = *df.$$

再由 Green 公式得到

$$\int_M \Delta f dV = \int_{\partial M} i_{\text{grad} f} dV = \int_{\partial M} *df. \qquad \#$$

注 6 可以对 C^∞ 微分形式定义 Laplace 算子 $\Delta: C^\infty(\wedge^s T^*M) \to C^\infty(\wedge^s T^*M)$. 满足 $\Delta\omega = 0$ 的 ω 称为**调和形式**. 关于调和形式和deRham上同调群的关系有著名的Hodge 理论, 参阅[Warner, F. W.].

当M紧致定向时, TM上的Riemann 度量给出了 $C^\infty(\wedge^s T^*M)$ 上的一个内积, 在此内积下, Δ 为一自伴算子, 因而可以考虑它的谱分解. 关于 Riemann 流形上 Laplace 算子的谱, 参阅[Berger, M., Gauduchon, P. and Mazet, E.]或[Gallot, S., Hullin, D. and Lafontaine, J.].

§6 活动标架

这一节主要利用活动标架研究线性联络, Levi-Civita 联络、曲率和 C^∞正则子流形的局部几何. 先用另一方式定义联络和协变导数.

定义 1 设 M 为 n 维 C^∞ 流形, $\xi = \{E, M, \pi, \text{GL}(m, R), R^m,$

$\mathscr{E}\}$ 为秩m的 C^∞ 向量丛. 如果线性算子

$$\nabla: C^\infty(E) \to C^\infty(T^*M \otimes E)$$

满足

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s, s \in C^\infty(E), f \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$$

则称 ∇ 为 E 或 ξ 上的**线性联络**. 称 ∇s 为 s 的**协变导数**.

由定义和 § 2 引理3(2)的证明可知,线性联络 ∇ 为局部算子,那就是,如果 $s|_U = 0$, 则 $\nabla s|_U = 0$. 于是,∇ 在 M 的开子集 U 上的限制 $\nabla^U = \nabla|_U$ 是有意义的(为方便,有时也记作 ∇). 如果 $E|_U$ 平凡, 则 $E|_U$ 的 C^∞标架场 $\{s_1, \cdots, s_m\}$ (即 $s_i \in C^\infty(E|_U)$, 且 $\{s_1(x), \cdots, s_m(x)\}$ 为 $x \in U$处纤维 E_x 的基)称为 U 上的 **C^∞ 局部标架场**.

设$\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$为 M 的开复盖,使得 $E|_{U_\alpha}$ 是平凡的,则 E 上的线性联络 ∇ 由$\{\nabla^{U_\alpha} | \alpha \in \Gamma\}$ 唯一决定. 令$\{s_1, \cdots, s_m\}$为U_α 上的局部标架场, 则存在U_α上的 C^∞实值 1 形式的 $m \times m$ 矩阵 $\omega = (\omega_{ij})$, 使得 $\nabla s_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \omega_{ij} \otimes s_j$. 如果$\{s_1^*, \cdots, s_m^*\}$为$U_\alpha$ 上另一局部标架场, $\nabla s_i^* = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_{ij}^* s_j^*, \omega^* = (\omega_{ij}^*)$. 设 $s_i^* = \sum\limits_{j=1}^{m} h_{ij} s_j$, $h^{-1} = (h^{ij})$为 $h = (h_{ij})$的逆矩阵. 因此, $s_i = \sum\limits_{j=1}^{m} h^{ij} s_j^*$. 从

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}^* \otimes s_j^* = \nabla s_i^* = \nabla\left(\sum_{l=1}^{m} h_{il} s_l\right) = \sum_{l=1}^{m} [dh_{il} \otimes s_l + h_{il} \nabla s_l]$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \left(dh_{il} + \sum_{k=1}^{m} h_{ik} \omega_{kl}\right) \otimes s_l$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{l=1}^{m} dh_{il} h^{lj} + \sum_{k,l=1}^{m} h_{ik} \omega_{kl} h^{lj}\right] \otimes s_j^*,$$

有

$$\omega^* = (dh)h^{-1} + h\omega h^{-1}.$$

已给M的开复盖$\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$和$U_\alpha$上的局部标架场$\{s_i^\alpha\}$. 设在$U_\alpha \cap U_\beta$上, $s_i^\alpha = \sum_{j=1}^{m} (h_{ij}^{\alpha\beta}) s_j^\beta$, $h^{\alpha\beta} = (h_{ij}^{\alpha\beta})$. 则$E$上的线性联络由一套$U_\alpha$上的$\mathrm{gl}(m, \boldsymbol{R})$值1形式$\omega^\alpha$定义, 使得在$U_\alpha \cap U_\beta$上满足

$$\omega^\beta = (\alpha h^{\alpha\beta})(h^{\alpha\beta})^{-1} + (h^{\alpha\beta})\omega^\beta(h^{\alpha\beta})^{-1}.$$

设　　$s \in C^\infty(E)$, $X, Y \in C^\infty(TM)$, $f \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$. 令

$$\nabla_X s = \nabla s(X),$$

$$R(X, Y)s = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})s.$$

从§2引理1知, 线性联络∇的曲率R具有性质:

$$R(Y, X) = -R(X, Y),$$

$$R(fX, Y) = R(X, fY) = fR(X, Y),$$

$$R(X, Y)(fs) = fR(X, Y)s.$$

假定$\{s_1, \cdots, s_m\}$为M的开集U上的C^∞局部标架场, $\nabla s_i = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} \otimes s_j$, 则存在$C^\infty$ 2形式Ω_{ij}使得

$$R(s_i) = \sum_{j=1}^{m} \Omega_{ij} \otimes s_j.$$

从

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \Omega_{ij}(X, Y) s_j &= R(s_i)(X, Y) = R(X, Y)s_i \\
&= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) s_i \\
&= \nabla_X \left(\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}(Y) s_j \right) - \nabla_Y \left(\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}(X) s_j \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}([X, Y]) s_j
\end{aligned}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(X(\omega_{ij}(Y))-Y(\omega_{ij}(X))-\omega_{ij}([X,Y]Y)s_j$$

$$+\sum_{j,k=1}^{m}(\omega_{ij}(Y)\omega_{jk}(X)-\omega_{ij}(X)\omega_{jk}(Y))s_k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(d\omega_{ij}-\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\right)(X,Y)s_j,$$

有

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}-\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}.$$

因此,R 局部可由 $C^\infty 2$ 形式的 $m\times m$ 矩阵 $\Omega=(\Omega_{ij})$ 定义,它正如 ∇ 局部可由 $C^\infty 1$ 形式 $\omega=(\omega_{ij})$ 定义一样. 利用矩阵记号,有

$$\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega.$$

定义 1 如果在 U 上 $\nabla s=0$, 则称 $E|_U$ 的 C^∞ 截面 s 关于 ∇ 是平行的.

定义 2 如果曲率 $R=0$(相当于任何局部有 $\Omega=(\Omega_{ij})=0$), 则称线性联络 ∇ 是平坦的.

定理 1 E 上的线性联络 ∇ 是平坦的$\Longleftrightarrow$存在局部平行的 C^∞ 标架场.

证明 ($\Longleftarrow$)设$\{s_1,\cdots,s_m\}$在开集U中为局部平行的C^∞标架场,则 $\nabla s_i=0$, $\nabla_X s_i=(\nabla s_i)(X)=0$, $\nabla_Y\nabla_X s_i=0$. 如果 $s\in C^\infty(E)$, 则局部有 $s=\sum_{j=1}^{m}f_js_j$, $f_j\in C^\infty(U,\mathbf{R})$. 于是,

$$R(X,Y)s=R(X,Y)\left(\sum_{j=1}^{m}f_js_j\right)=\sum_{j}^{m}f_jR(X,Y)s_j$$

$$=\sum_{j=1}^{m}f_j(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]})s_j=0.$$

这就证明了 $R=0$.

或者从 $0=\nabla s_i=\sum_{j=1}^{m}\omega_{ij}\otimes s_j$ 得到 $\omega=(\omega_{ij})=0$ 和 $\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega=0$, 因而 $R=0$.

($\Longleftarrow$)假定 ∇ 是平坦的, 即 $R=0$ 或 $\Omega=0$, 则 ω 满足 Maurer-Cartan 方程 $d\omega=\omega\wedge\omega$. 由下面的注1, 局部存在一个GL(m,$\boldsymbol{R}$)值映射 $h=(h_{ij})$ 使得 $(dh)h^{-1}=\omega$. 令 $h^{-1}=(h^{ij})$ 和 $s_i^*=\sum_{j=1}^{m}h^{ij}s_j$.

则 $\nabla s_i^*=\sum_{j=1}^{m}\omega_{ij}^*\otimes s_j^*$, 且

$$\omega^*=(dh^{-1})h+h^{-1}\omega h=-h^{-1}(dh)h^{-1}h+h^{-1}(dh)h^{-1}h=0,$$

即 $\nabla s_i^*=0$, s_i^* 为 C^∞ 平行标架场. #

注 1 如果 $h=(h_{ij})$: $U\to \mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})$ 为 C^∞ 映射和 $\omega=(dh)h^{-1}$, 则 ω 为 U 上的 $\mathrm{gl}(m,\boldsymbol{R})$值 C^∞ 1 形式, 且

$$\omega h=dh,$$

$$(d\omega)h-\omega\wedge dh=d^2h=0,$$

即满足所谓的 Maurer-Cartan 方程 $d\omega=(\omega\wedge dh)h^{-1}=\omega\wedge\omega$.

相反地, 给了一个 U 上具有 $d\omega=\omega\wedge\omega$ 的 $\mathrm{gl}(m,\boldsymbol{R})$值 C^∞1 形式 ω, 从 Frobenius 定理(参阅[Palais, R. S. and Terng, C. L., 1.4.7 Example]可知, 已给任何 $x_0\in U$ 和 $h_0\in\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})$, 存在 x_0 在 U 中的开邻域 U_0 和 C^∞ 映射 $h=(h_{ij})$:$U_0\to\mathrm{GL}(m,\boldsymbol{R})$, 使得 $h(x_0)=h_0$ 和 $(dh)h^{-1}=\omega$. 因此, 一阶微分方程组: $dh=\omega h$ 或 $(dh)h^{-1}=\omega$ 有局部解$\Longleftrightarrow d\omega=\omega\wedge\omega$.

定义 3 如果 n 维 C^∞ 流形 M 上存在整体的 C^∞ 平行标架场, 则 E 上的线性联络 ∇ 称为**整体平坦**的.

例 1 设 $E=M\times\boldsymbol{R}^m$ 为平凡 C^∞ 向量丛, $s\in C^\infty(E)$, $s(x)=(x,f(x))$, 定义 $(\nabla s)_x=(x,df_x)$. 则截面 s 平行$\Longleftrightarrow df=0\Longleftrightarrow f$ 为

局部常值映射. 故$\{s_i(x)=(x,e_i)\mid e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$,其中第$i$个坐标为1, $i=1,\cdots,m\}$为C^∞平行标架场,即∇为整体平坦的.

引理1 E具有整体平坦的线性联络$\nabla\Longleftrightarrow E$为平凡$C^\infty$向量丛.

因此,如果E不是平凡C^∞向量丛,则E上没有整体平坦的线性联络.

证明 $(\Longrightarrow)$因为E具有整体C^∞平行标架场, 故E为平凡C^∞向量.

$(\Longleftarrow)$如果E为平凡C^∞向量丛,则E同构于积丛$M\times\boldsymbol{R}^m$,由例1,E存在整体平坦的线性联络∇. #

例2 平坦线性联络不必是整体平坦的. 例如M为Möbius带$[0,1]\times\boldsymbol{R}/\sim$,其中$(0,t)\sim(1,-t)$. 则$[0,1]\times\boldsymbol{R}$的切丛的平凡线性联络诱导了$TM$上的平坦线性联络$\nabla$. 但因$TM$不是平凡向量丛(否则$TM$有整体$C^\infty$标架场, 因而$M$可定向, 与$M$不可定向相矛盾),故$\nabla$不是整体平坦的.

设(M,g)为n维C^∞ Riemann流形, ∇为Riemann联络或Levi-Civita联络. $\{e_1,\cdots,e_n\}$为M的开子集U上的局部规范正交切标架场,$\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$为$U$中对偶于$\{e_1,\cdots,e_n\}$的1形式, 即

$$\omega_i(e_j)=\begin{cases}1, & i\neq j,\\ 0, & i=j,\end{cases}$$ 假定$\nabla e_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_{ij}\otimes e_j$. 则

∇与g相容,即

$$X(g(Y,Z))=g(\nabla_XY,Z)+g(Y,\nabla_XZ)$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow 0=dg_{ij}(X)=Xg_{ij}&=X(g(e_i,e_j))=g(\nabla_Xe_i,e_j)+g(e_i,\nabla_Xe_j)\\ &=(g(\nabla e_i,e_j)+g(e_i,\Delta e_j))(X)\\ &=\left(g\left(\sum_{l=1}^{n}\omega_{il}e_l,e_j\right)+g\left(e_i,\sum_{t=1}^{n}\omega_{jt}e_t\right)\right)(X)\\ &=(\omega_{ij}+\omega_{ji})(X)\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \omega_{ij}+\omega_{ji}=0.$$

此外，挠张量为 0，即 $0=T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$

$$\Longleftrightarrow [e_i,e_j]=\nabla_{e_i}e_j-\nabla_{e_j}e_i=(\nabla e_j)(e_i)-(\nabla e_i)(e_j)$$

$$=\left(\sum_{l=1}^{n}\omega_{jl}e_l\right)(e_i)-\left(\sum_{l=1}^{n}\omega_{il}e_l\right)(e_j)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}[\omega_{jl}(e_i)-\omega_{il}(e_j)]e_l.$$

于是，

$$d\omega_l=\sum_{k=1}^{n}\omega_{lk}\wedge\omega_k$$

$$\Longleftrightarrow -\omega_l([e_i,e_j])=e_i\omega_l(e_j)-e_j\omega_l(e_i)-\omega_l([e_i,e_j])$$

$$=d\omega_l(e_i,e_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\omega_{lk}\wedge\omega_k(e_i,e_j)=\omega_{il}(e_j)-\omega_{jl}(c_i)$$

$$\Longleftrightarrow [e_i,\ e_j]=\sum_{l=1}^{n}[\omega_{jl}(e_i)-\omega_{il}(e_j)]e_l.$$

$$\Longleftrightarrow T=0.$$

设 $[e_i,\ e_j]=\sum_{l=1}^{n}c_{ijl}e_l$ 和 $\omega_{ij}=\sum_{l=1}^{n}h_{ijl}\omega_l$. 则

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0\Longleftrightarrow h_{ijl}=-h_{jil},$$

$$[e_i,\ e_j]=\sum_{l=1}^{n}[\omega_{jl}(e_i)-\omega_{il}(e_j)]e_l\Longleftrightarrow h_{jli}-h_{ilj}=c_{ijl}.$$

如果 c_{ijl} 作为已知，则 h_{ijl} 为上述线性方程组的唯一解. 它容易明显地找到，那就是

$$h_{ijl}=\frac{1}{2}(-c_{ijl}+c_{jli}+c_{lij}).$$

于是，由 h_{ijl} 依次确定 ω_{ij}, ∇e_i, ∇. 等价地，对任何 X, Y, $Z\in$

$C^{\infty}(TM)$, $\nabla_X Y$ 由方程

$$g(\nabla_X Y,\ Z)=\frac{1}{2}\{Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)$$
$$-g(Y,[X,Z])-g(X,[Y,Z])-g(Z,[Y,X])\}$$

确定.

综合上述得到

定理 2 (**Riemann 流形基本定理**)在 n 维 C^{∞}Riemann 流形 (M,g) 上存在唯一的线性联络 ∇，使得 $T=0$ 且 ∇ 与 g 相容(这联络就是 Riemann 联络或 Livi-Civita 联络)．如果$\{e_1, \cdots, e_n\}$为 TM 的局部规范正交 C^{∞} 标架场，$\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$对偶于$\{e_1, \cdots, e_n\}$的 C^{∞} 1 形式(称为**余标架场**)，则 g 的Livi-Civita 1 形式 ω_{ij} 由以下结构方程:

$$d\omega_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\wedge\omega_j, \qquad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0$$

唯一确定.

设 $\omega=(\omega_{ij})$为 g 的 Levi-Civita 联络 1 形式，$\Omega=(\Omega_{ij})$为 Riemann 曲率张量．$\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega$ 称为曲率方程．记

$$\Omega_{ij}=-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}K_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l,\ \ K_{ijkl}=-K_{ijlk}.$$

易见

$$K_{ijkl}=\frac{1}{2}(K_{ijkl}-K_{ijlk})=\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{n}K_{ijst}\omega_s\wedge\omega_t(e_k,e_l)$$
$$=\Omega_{ji}(e_k,e_l)=g(R(e_j)(e_k,e_l),e_i)=g(R(e_k,e_l)e_j,e_i).$$

对 $d\omega_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\wedge\omega_j$ 两边求外微分数，并利用 $\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega$ 得到

$$0=d^2\omega_i=\sum_{j=1}^{n}(d\omega_{ij}\wedge\omega_j-\omega_{ij}\wedge d\omega_j)=\sum_{j=1}^{n}\left(\Omega_{ij}+\sum_{l=1}^{n}\omega_{il}\wedge\omega_{lj}\right)\wedge\omega_j$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\wedge d\omega_j=\sum_{j=1}^{n}\Omega_{ij}\wedge\omega_j+\sum_{j,l=1}^{n}\omega_{il}\wedge\omega_{lj}\wedge\omega_j-\sum_{j,l=1}^{n}\omega_{ij}\wedge\omega_{jl}\wedge\omega_l$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\Omega_{ij}\wedge\omega_j=-\frac{1}{2}\sum_{j,k,l=1}^{n}K_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l\wedge\omega_j.$$

从上式立即可推出第一 Bianchi 恒等式

$$K_{ijkl}+K_{iklj}+K_{iljk}=0.$$

最后，我们将研究C^∞正则子流形的局部不变量. 设M为$n+m$维 C^∞Riemann流形$(\widetilde{M},\tilde{g})=(\widetilde{M},\langle,\rangle)$的 n维C^∞正则子流形，$\widetilde{\nabla}$ 为$(\widetilde{M},\tilde{g})$的 Levi-Civita 联络，$T_PM^\perp$ 为 T_PM 在 $T_P\widetilde{M}$ 中的正交补，$TM^\perp$ 为M在$\widetilde{M}$中的法丛，即 $TM^\perp|_x=T_xM^\perp$. 下面我们给出 C^∞正则子流形的三个基本局部不变量：第 I 和第 II 基本形式以及诱导法联络，并导出与它们有关的方程.

设 $N\in C^\infty(TM^\perp)$, $A_N:T_PM\to T_PM$, $A_N(X)=(\widetilde{\nabla}_XN|_P)^\top$ 表示线性映射，它是$\widetilde{\nabla}_XN|_P$ 到 T_PM 的正交投影（与 § 4 例 1 比较，那里的 N 为C^∞单位法向量场，而这里不必是）. 因

$\widetilde{\nabla}_X(fN)=(Xf)N+f\widetilde{\nabla}_XN=df(X)N+f\widetilde{\nabla}_XN, f\in C^\infty(M,R)$,
而 $df(X)N$ 为法向量，我们有

$$A_{fN}(X)=fA_N(X).$$

特别地，如果 N_1, $N_2\in C^\infty(TM^\perp)$, $N_1(P)=N_2(p)$，则对任何 $X\in T_pM$，有

$$A_{N_1}(X)-A_{N_2}(X)=A_{N_1-N_2}(X)=A_{\left(\sum\limits_{i=1}^{m}a^ie_i\right)}(X)|_p$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a^i(p)A_{e_i}(X)|_p=0,$$

即 $A_{N_1}(X)=A_{N_2}(X)$，其中$\{e_1,\cdots,e_m\}$为$TM^\perp$在p的某开邻域中的局部C^∞基向量场. 因此，对每个法向量$N_0\in T_pM^\perp$，对应一个T_pM上的线性算子A_{N_0}，称为在法方向N_0上的M的**形状算子**.

引理 1 形状算子$A_{N_0}:T_pM\to T_pM$是自共轭的，即对任何$u_1,u_2\in T_pM$，有$\tilde{g}(A_{N_0}(u_1),u_2)=\tilde{g}(u_1,A_{N_0}(u_2))$.

证明 设N为M上定义在p的开邻域U上的C^∞法向量场，使得$N(p)=N_0$，而X_i为U上的C^∞切向量场使$X_i(p)=u_i$，$i=1,2$. 则

$$\begin{aligned}&\langle A_N(X_1),\ X_2\rangle=\langle(\widetilde{\nabla}_{X_1}N)^T,X_2\rangle\\&=\langle\widetilde{\nabla}_{X_1}N,X_2\rangle=X_1\langle N,X_2\rangle-\langle N,\widetilde{\nabla}_{X_1}X_2\rangle\\&=-\langle N,\widetilde{\nabla}_{X_1}X_2\rangle.\end{aligned}$$

类似地，有

$$\langle A_N(X_2),X_1\rangle=-\langle N,\widetilde{\nabla}_{X_2}X_1\rangle,$$

故

$$\begin{aligned}&\langle A_N(X_1),X_2\rangle-\langle A_N(X_2),X_1\rangle\\&=-\langle N,\widetilde{\nabla}_{X_1}X_2\rangle+\langle N,\widetilde{\nabla}_{X_2}X_1\rangle=\langle N,\widetilde{\nabla}_{X_2}X_1-\widetilde{\nabla}_{X_1}X_2\rangle\\&=-\langle N,[X_1,X_2]\rangle=0,\end{aligned}$$

即

$$\langle A_N(X_1),X_2\rangle=\langle X_1,A_N(X_2)\rangle,$$

$$\tilde{g}(A_{N_0}(u_1),u_2)=\tilde{g}(u_1,A_{N_0}(u_2)).\qquad \#$$

设$i:M\to\widetilde{M}$为包含映射. M的第Ⅰ基本形式Ⅰ是诱导度量$i^*\tilde{g}$，即T_xM上的内积$\mathrm{I}_x=\tilde{g}_x|_{T_xM\times T_xM}=(i^*\tilde{g})_x$，$\mathrm{I}_x(X,\ Y)=(i^*\tilde{g})_x(X,Y)=\tilde{g}_x(i_*X,i_*Y)$，$X$，$Y\in T_xM$. 根据§4定义1和$\widetilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+V(X,Y)$，并利用公式 ，

$$\langle \mathrm{II}(X,Y),N\rangle=\langle V(X,Y),N\rangle=\langle\widetilde{\nabla}_XY-\nabla_XY,N\rangle$$

$$=\langle\widetilde{\nabla}_X Y, N\rangle=-\langle Y, \widetilde{\nabla}_X N\rangle=-\langle A_N(X), Y\rangle$$

得到 M 的第 II 基本形式 II，它是 C^∞ 截面

$$\mathrm{II}: M \to \odot^2(T^*M)\otimes TM^\perp, \quad x \mapsto \mathrm{II}_x,$$

其中 $\odot^s(T^*M)$ 为 s 阶对称协变张量丛，$\mathrm{II}_x(X,Y)\in T_xM^\perp$.

M 的第三个不变量为 $TM^\perp$ 上的诱导法联络 $\nabla^\perp$，由 $\nabla^\perp_X N=(\widetilde{\nabla}_X N)^\perp$ 定义，它是 $\widetilde{\nabla}_X N$ 到 $TM^\perp$的正交投影．于是，$\widetilde{\nabla}_X N=(\widetilde{\nabla}_X N)^T+(\widetilde{\nabla}_X N)^\perp=A_N(X)+\nabla^\perp_X N$.

现在我们利用活动标架叙述上述三个局部不变量．选$(\widetilde{M},\tilde{g})$的一个 C^∞ 局部规范正交标架场 $e_1, \cdots, e_{n+m}$，如果限制到 M，$e_1,\cdots,e_n$ 切于 M，即它是$(M,\mathrm{I})=(M,i^*\tilde{g})$的 C^∞ 局部规范正交标架场(M 为 C^∞ 正则子流形，并对适当的坐标标架场作 Gram-Schmidt 正交化而得到)．下面我们规定指标变化范围:

$$1\leqslant A,B,C\leqslant n+m;\ 1\leqslant i,j,k\leqslant n;\ n+1\leqslant \alpha,\beta,\gamma\leqslant n+m.$$

设 $\omega_1, \cdots, \omega_{n+m}$ 为 $\widetilde{M}$ 上 $e_1, \cdots, e_{n+m}$ 的对偶基，限制到 M 有 $\omega_{i\alpha}=\sum\limits_j h_{i\alpha j}\omega_j$. 则

定理 3 (1) $\mathrm{I}=\sum\limits_i \omega_i\otimes\omega_i$;

(2) $A_{e_\alpha}(e_i)=-\sum\limits_j h_{j\alpha i}e_j$;

(3) $\mathrm{II}(e_i, e_j)=-\sum\limits_\alpha h_{j\alpha i}e_\alpha$;

(4) $\mathrm{II}=-\sum\limits_{\alpha,i}\omega_{i\alpha}\otimes\omega_i\otimes e_\alpha$;

(5) $\nabla^\perp e_\alpha=\sum\limits_\beta \omega_{\alpha\beta}\otimes e_\beta$.

证明 (1) 因为

$$\sum_i \omega_i \otimes \omega_i(X, Y) = \sum_i \omega_i(X)\omega_i(Y)$$

$$= \sum_i \omega_i\left(\sum_j a^j e_j\right)\cdot \omega_i\left(\sum_k b^k e_k\right) = \sum_{i,j,k} a^j b^k \delta_j^i \delta_k^i$$

$$= \sum_i a^i b^i = \left\langle \sum_i a^i e_i,\ \sum_j b^j e_j \right\rangle = \langle X, Y\rangle = I(X, Y),$$

故

$$\mathrm{I} = \sum_i \omega_i \otimes \omega_i .$$

(2) $A_{e_\alpha}(e_i) = (\widetilde{\nabla}_{e_i} e_\alpha)^T = (\widetilde{\nabla} e_\alpha)(e_i)^T$

$$= \left(\left(\sum_B \omega_{\alpha B} \otimes e_B\right)(e_i)\right)^T = -\left(\sum_B \omega_{B\alpha}(e_i) e_B\right)^T$$

$$= -\sum_j \omega_{j\alpha}(e_i) e_j = -\sum_j \left(\sum_k h_{j\alpha k}\omega_k(e_i)\right) e_j$$

$$= -\sum_{j,k} h_{j\alpha k}\delta_i^k e_j = -\sum_j h_{j\alpha i} e_j .$$

(3) 因 $\langle \mathrm{II}(e_i, e_j), e_\alpha\rangle = -\langle A_{e_\alpha}(e_i), e_j\rangle$

$$= \left\langle -\sum_k h_{k\alpha i} e_k,\ e_j \right\rangle = -\sum_k h_{k\alpha i}\delta_j^k = -h_{j\alpha i},$$

故

$$\mathrm{II}(e_i, e_j) = -\sum_\alpha h_{j\alpha i} e_\alpha .$$

(4) 由(3)得到

$$\mathrm{II} = -\sum_{i,j} \omega_i \otimes \omega_j \otimes \left(\sum_\alpha h_{j\alpha i} e_\alpha\right)$$

$$= -\sum_{\alpha,j}\left(\sum_i h_{j\alpha i}\omega_i\right)\otimes \omega_j \otimes e_\alpha = -\sum_{\alpha,j} \omega_{j\alpha}\otimes\omega_j\otimes e_\alpha$$

$$= -\sum_{\alpha,i} \omega_{i\alpha}\otimes\omega_i\otimes e_\alpha .$$

(5) $(\nabla^{\perp} e_\alpha)(X)=\nabla^{\perp}_X e_\alpha=(\widetilde{\nabla}_X e_\alpha)^{\perp}=((\widetilde{\nabla} e_\alpha)(X))^{\perp}$

$$=\left(\sum_B \omega_{\alpha B}\otimes e_B(X)\right)^{\perp}=\left(\sum_\beta \omega_{\alpha\beta}\otimes e_\beta\right)(X),$$

即

$$\nabla^{\perp} e_\alpha=\sum_\beta \omega_{\alpha\beta}\otimes e_\beta. \qquad \#$$

设$(\widetilde{M},\tilde{g})$的结构方程为

$$d\omega_A=\sum_B \omega_{AB}\wedge\omega_B,\quad \omega_{AB}+\omega_{BA}=0,$$

曲率方程为

$$\widetilde{\Omega}_{AB}=d\omega_{AB}-\sum_C \omega_{AC}\wedge\omega_{CB}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{C,D} K_{ABCD}\omega_C\wedge\omega_D,\ K_{ABCD}=-K_{ABDC},$$

其中 ω_{AB} 和 $\widetilde{\Omega}_{AB}$ 分别为$(\widetilde{M},\tilde{g})$的 Levi-Civita 联络和 Riemann 曲率张量.

限制$(\widetilde{M},\tilde{g})$的结构方程到$(M, i^*\tilde{g})=(M, \mathrm{I})$，得到$\{\omega_{ij}\}$为$(M, \mathrm{I})$上的 Levi-Civita 联络 1 形式 ω_{ij} 的结构方程为(注意 $i^*\omega_\alpha=0$,简记为 $\omega_\alpha=0$)

$$d\omega_i=\sum_j \omega_{ij}\wedge\omega_j,\quad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0.$$

相应于法联络,有

$$0=d\omega_\alpha=\sum_i \omega_{\alpha i}\wedge\omega_i,\quad \omega_{\alpha i}+\omega_{i\alpha}=0.$$

限制$(\widetilde{M},\tilde{g})$的曲率方程

$$\widetilde{\Omega}_{ij}=d\omega_{ij}-\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\sum_\alpha \omega_{i\alpha}\wedge\omega_{\alpha j}=\Omega_{ij}-\sum_\alpha \omega_{i\alpha}\wedge\omega_{\alpha j}, \tag{1}$$

$$\tilde{\Omega}_{i\alpha}=d\omega_{i\alpha}-\sum_{k}\omega_{ik}\wedge\omega_{k\alpha}-\sum_{\beta}\omega_{i\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha}, \tag{2}$$

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}=d\omega_{\alpha\beta}-\sum_{\gamma}\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}-\sum_{i}\omega_{\alpha i}\wedge\omega_{i\beta}=\Omega^{\perp}_{\alpha\beta}-\sum_{i}\omega_{\alpha i}\wedge\omega_{i\beta} \tag{3}$$

到$(M, i^*\tilde{g})=(M, \mathrm{I})$得到$(M, \mathrm{I})$的 Levi-Civita 联络$\nabla$的曲率张量$\Omega$和法联络$\nabla^{\perp}$的**法曲率**$\Omega^{\perp}$分别为

$$\Omega_{ij}=\sum_{\alpha}\omega_{i\alpha}\wedge\omega_{\alpha j}+\tilde{\Omega}_{ij}$$

和

$$\Omega^{\perp}_{\alpha\beta}=\sum_{i}\omega_{\alpha i}\wedge\omega_{i\beta}+\tilde{\Omega}_{\alpha\beta},$$

方程(1),(2)和(3)分别称为C^{∞}正则子流形 M 的 Gauss,Codazzi 和 Ricci 方程.

注 2 完备、单连通空间形式(Euclid 空间，球面和双曲空间)的C^{∞}正则子流形 M 的第 I 和第 II 基本形式以及法联络(满足 Gauss、Codazzi 和 Ricci 方程)在相差一个空间形式的同尺映射下，完全确定了 M. 参阅[Palais, R.S. and Terng, C.L., Chapter 2].

参考文献

[1] Adams, J. F., On the Nonexistence of Elements of Hopf Invariant One, *Ann. of Math.* 72 (1960), 20—104.

[2] Berger, M., Gauduchon, P. and Mazet, E., Le Spectre D'une Variete Riemannienne, Lecture Notes in Math. 194, Springer, Berlin-Heidelberg, 1971.

[3] Bott, R. and Tu, L. W., Differential Forms in Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1982.

[4] Bröcher, Th. and Jänich, K., Introduction to Differential Topology, Combridge University Press, 1982.

[5] Dieudonné, J., Foundations of Mordern Analysis, New York, Academic Press, 1960.

[6] Eells, J. and Lemaire, L., A Report on Harmonic Maps, Bull. London Math. Soc. 10, 1978, 1—68.

[7] Freed, D. S. and Uhlenbeck, K. K., Instantons and 4—Manifolds, Math. Sci. Res. Inst. Publ. Vol. 1, Springer, New York, 1984.

[8] Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., Riemannian Geometry, Springer-Verlag, Berlin Heidlberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.

[9] Guillemin, V. and Pollack, A., Differential Topology, Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[10] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An Introduction to the Theory of Numbers, 375—393.

[11] Kahn, D. W., Introduction to Global Analysis, Academic Press, 1980.

[12] Kervaire, M., A Manifold Which Does Not Admit any Differentiable Structure, *Comm. Math.*, 34, 1960, 257—270.

[13] Kervaire, M. and Milnor, J. W. Groups of Homotopy Spheres: I, *Annals of Math.* Vol. 77. No. 3, May, 1963, Printed in Japan.

[14] Lawson, H. B., The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. *Amer. Math. Sci.* Providence, RI., 1985.

[15] Milnor, J. W., On Manifolds Which are Homeomorphic to the 7-Sphere, *Ann. Math.*, **64**. 1956, 399—405.

[16] Milnor, J. W., Morse Theory, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[17] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D., Characteristic Classes, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, p57.

[18] Munkres, J. R., Elementary Differetial Topology, Revised Edition, 1961.

[19] Munkves, J. R., Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[20] Palais, R. S. and Terng, C. L., Critical Point Theory and Submanifold Geometry, Lecture Notes in Mathematics 1353, Springer-Verlag, 1988.

[21] Sternberg, S., Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[22] Warner, F. W., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, GTM 94, Springer, Berlin Heidelberg, 1983.

[23] Whitney, H., Differentiabl Manifolds, *Annals Math.*, 37, 936, 645—680.

[24] Whitney, H., Geometric Integration Theory, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1957.

[25] Xu Senlin and Zhou Jian, The Sufficient and Necessary Condition, Journal of China University of Science and Technology, Vol. 19, No. 4, 1989.

[26] I. M. 菲赫金哥尔茨著，北京大学高等数学教研室译，微积分学教程，第二卷第二分册，人民教育出版社，1954.

[27] P. J. 希尔顿, S. 瓦理著, 江泽涵等译, 同调论, 上海科学技术出版社, 1963.

[28] J. W. 米尔诺著, 熊金城译, 从微分观点看拓扑, 上海科学技术出版社, 1983.

[29] 岩堀长庆著, 孙泽瀛译, 李群论, 上海科学技术出版社, 1962.

[30] 徐森林著, 流形和 Stokes 定理, 高等教育出版社, 1983.

[31] 徐森林和周坚, S^7 上无 Lie 群构造, 科学通报, 1989 年第 11 期.

索 引

一 画

三 画

四 画

五 画

六 画

七　画

八　画

九　画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 八 画